# Suite I - Die StrukturGebende

**Teil 8: Essays 57-70**

**(Keine) Echte TeilKlasse. $x \subset y$. $x \not\subset y$. $\subset$InduktionsSatz für (endliche) Klassen. $\subset$InduktionsSatz für Mengen. (Unten/Oben) Nicht-Vollständig. (Unten/Oben) Nicht-Stark-Vollständig. (Unten/Oben) Nicht-Total-Vollständig. Universelle InklusionsRelation sse. sse-Notation. $M$_induzierte Relation in $z$. InklusionsRelation in $z$.**

Andreas Unterreiter

13. September 2011

**echte TeilKlasse**. $x \subset y$.
**keine echte TeilKlasse**. $x \not\subset y$.
$\subset$**InduktionsSatz Klassen**.
$\subset$**InduktionsSatz Mengen**.
$\subset$**InduktionsSatz endliche Klassen**.

**Ersterstellung: 23/04/07** **Letzte Änderung: 19/05/11**

**57-1. Echte TeilKlassen** sind TeilKlassen, die ungleich jener Klasse sind, deren TeilKlasse sie sind:

**57-1(Definition)**

1) "$x \subset y$" genau dann, wenn gilt:

$$(x \subseteq y) \wedge (x \neq y).$$

2) "$x$ **echte TeilKlasse von** $y$" genau dann, wenn gilt:

$$x \subset y.$$

3) "$x \not\subset y$" genau dann, wenn gilt:

$$\neg((x \subseteq y) \wedge (x \neq y)).$$

4) "$x$ **keine echte TeilKlasse von** $y$" genau dann, wenn gilt:

$$x \not\subset y.$$

**57-2.** Zur Vereinfachung von Beweisen ist es hilfreich, äquivalente Aussagen zu "$x \subset y$" zur Verfügugn zu haben:

**<u>57-2(Satz)</u>**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \subset y$.

`ii)` "$x \subseteq y$" *und* "$y \not\subseteq x$".

`iii)` "$x \subseteq y$" *und* "$y \neq x$".

<u>Beweis</u> **57-2** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \subset y$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \subset y$”
folgt via **57-1(Def)**: $(x \subseteq y) \wedge (x \neq y)$.

`2:` Aus →) “$\ldots x \neq y$”
folgt via **0-9**: $(x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x)$.

`3:` Aus `2`“$(x \not\subseteq y) \vee (y \not\subseteq x)$” und
aus `1`“$x \subseteq y$”
folgt: $y \not\subseteq x$.

`4:` Aus `1`“$x \subseteq y \ldots$” und
aus `3`“$y \not\subseteq x$”
folgt: $(x \subseteq y) \wedge (y \not\subseteq x)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (y \not\subseteq x)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \not\subseteq x$”
folgt via **0-10**: $y \neq x$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x \subseteq y$” und
aus `1`“$y \neq x$”
folgt: $(x \subseteq y) \wedge (y \neq x)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (y \neq x)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \neq x$”
folgt: $x \neq y$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x \subseteq y \ldots$” und
aus `1`“$x \neq y$”
folgt via **57-1(Def)**: $x \subset y$.

□

**57-3.** Mit dem folgenden Kriterium wird "$x \subseteq y$" mit "$x \subset y$" oder "$x = y$" in Zusammenhang gebracht:

**57-3(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \subseteq y$.

`ii)` *"$x \subset y$" oder "$x = y$".*

<u>Beweis</u> **57-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \subseteq y$.

`1:` Es gilt: $(x \neq y) \vee (x = y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \neq y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y$" und
aus `1.1.Fall` "$x \neq y$"
folgt via **57-1(Def)**: $x \subset y$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \subset y) \vee (x = y)$.

`1.2.Fall` $x = y$.

Aus `1.2.Fall` "$x = y$"
folgt: $(x \subset y) \vee (x = y)$.

In beiden Fällen gilt: $(x \subset y) \vee (x = y)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \subset y) \vee (x = y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(x \subset y) \vee (x = y)$"
folgt: $(x \subset y) \vee (x = y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \subset y$.

Aus `1.1.Fall` "$x \subset y$"
folgt via **57-1(Def)**: $x \subseteq y$.

`1.2.Fall` $x = y$.

Aus `1.2.Fall` "$x = y$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq y$.

In beiden Fällen gilt: $x \subseteq y$.

□

**57-4.** Falls $x$ echte TeilKlasse von $y$ ist, dann ist jedes Element von $x$ auch Element von $y$ und es gibt eine Menge, die Element von $y$, aber nicht Element von $x$ ist:

**57-4(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) $x \subset y$.

*Dann folgt:*

a) $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y)$.

b) $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \notin x)$.

Beweis **57-4** a)

1: Aus $\rightarrow$) "$x \subset y$"
folgt via **57-1(Def)**: $x \subseteq y$.

2: Aus 1 "$x \subseteq y$"
folgt via **0-2(Def)**: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in y)$.

b)

1: Aus $\rightarrow$) "$x \subset y$"
folgt via **57-2**: $y \not\subseteq x$.

2: Aus 1 "$y \not\subseteq x$"
folgt via **0-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \notin x)$.

□

**57-5.** Mit dem folgenden Satz wird ein Mittel zum Nachweis, dass eine Klasse eine echte TeilKlasse einer anderen Klasse ist, zur Verfügung gestellt:

**57-5(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $x \subseteq y$.

$\rightarrow\!)$ "$p \notin x$" *und* "$p \in y$".

*Dann folgt* "$x \subset y$".

Beweis **57-5**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$\ldots p \in y$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$p \notin x \ldots$"
folgt via **0-10**: $y \neq x$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "$x \subseteq y$" und
aus 1 "$y \neq x$"
folgt via **57-2**: $x \subset y$.

□

**57-6.** Wie vielleicht erwartet gilt $x \not\subset y$ genau dann, wenn $\neg(x \subset y)$:

**57-6(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \not\subset y$.

`ii)` $\neg(x \subset y)$.

Beweis **57-6**

`1:` $$x \not\subset y \stackrel{\mathbf{57-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg((x \subseteq y) \wedge (x \neq y)) \stackrel{\mathbf{57-1(Def)}}{\Leftrightarrow} \neg(x \subset y).$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(x \not\subset y) \Leftrightarrow (\neg(x \subset y)).$$

$\square$

**57-7.** Mit Hilfe von **0-5** kann Einiges über "$x \subset x \cup y$" ausgesagt werden:

**57-7(Satz)**

a) *Aus "$p \notin x$" und "$p \in y$" folgt "$x \subset x \cup y$".*

b) *Aus "$x \subset x \cup y$" folgt "$\exists \Omega : (\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in y)$".*

Beweis **57-7** a) VS gleich $(p \notin x) \wedge (p \in y)$.

1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

2: Aus VS gleich "$\ldots p \in y$" und
aus VS gleich "$p \notin x \ldots$"
folgt via **0-5**: $y \not\subseteq x$.

3: Aus 2"$y \not\subseteq x$"
folgt via **2-11**: $x \cup y \neq x$.

4: Aus 3$x \neq y \cup x$
folgt: $x \neq x \cup y$.

5: Aus 1"$x \subseteq x \cup y$" und
aus 4"$x \neq x \cup y$"
folgt via **57-1(Def)**: $x \subset x \cup y$.

b) VS gleich $x \subset x \cup y$.

1: Aus VS gleich "$x \subset x \cup y$"
folgt via **57-1(Def)**: $x \neq x \cup y$.

2: Aus 1
folgt: $x \cup y \neq x$.

3: Aus 2"$x \cup y \neq x$"
folgt via **2-11**: $y \not\subseteq x$.

4: Aus 3"$y \not\subseteq x$"
folgt via **0-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \notin x)$.

5: Aus 4
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in y)$.

□

**57-8.** Es folgen zwei durch Negation ineinander übergehende Aussagen über 0 und echte TeilKlassen:

<u>**57-8(Satz)**</u>

a) *"$0 \subset x$" genau dann, wenn "$0 \neq x$".*

b) *"$0 \not\subset x$" genau dann, wenn "$x = 0$".*

<u>Beweis **57-8**</u> a) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $0 \subset x$.

Aus VS gleich "$0 \subset x$"
folgt via **57-1(Def)**: $0 \neq x$.

a) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $0 \neq x$.

1: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq x$.

2: Aus 1"$0 \subseteq x$" und
aus VS gleich "$0 \neq x$"
folgt via **57-1(Def)**: $0 \subset x$.

b)

1: $0 \not\subset x \overset{\textbf{57-6}}{\Leftrightarrow} \neg(0 \subset x) \overset{\text{a)}}{\Leftrightarrow} \neg(0 \neq x) \Leftrightarrow x = 0.$

2: Aus 1
folgt: $(0 \not\subset x) \Leftrightarrow (x = 0)$.

□

**57-9.** Die leere Menge ist genau dann eine echte TeilKlasse von $\{p\}$, wenn $p$ eine Menge ist:

**57-9(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \subset \{p\}$.

`ii)` $p$ *Menge.*

Beweis **57-9** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \subset \{p\}$.

`1`: Aus `VS` gleich "$0 \subset \{p\}$"
folgt via **57-1(Def)**: $0 \neq \{p\}$.

`2`: Aus `1`"$0 \neq \{p\}$"
folgt via **1-3**: $p$ Menge.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $p$ Menge.

`1`: Aus `VS` gleich "$p$ Menge"
folgt via **1-3**: $0 \neq \{p\}$.

`2`: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \{p\}$.

`3`: Aus `2`"$0 \subseteq \{p\}$" und
aus `1`"$0 \neq \{p\}$"
folgt via **57-1(Def)**: $0 \subset \{p\}$.

□

**57-10.** Das folgende Kriterium für $x \subset x \cup y$ ist vielleicht nicht ganz erwartet:

**57-10(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \subset x \cup y$.

`ii)` $y \not\subseteq x$.

Beweis **57-10** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \subset x \cup y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \subset x \cup y$"
folgt via **57-7**: $\exists \Omega : (\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in y)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in y$" und
aus `1`"$\ldots \Omega \notin x \ldots$"
folgt via **0-5**: $y \not\subseteq x$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $y \not\subseteq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \not\subseteq x$"
folgt via **0-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \notin x)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \notin x$" und
aus `1`"$\ldots \Omega \in y \ldots$"
folgt via **57-7**: $x \subset x \cup y$.

□

**57-11.** $x$ ist genau dann eine echte TeilKlasse von $\{p\} \cup x$, wenn $p$ eine Menge ist, die *nicht* in $x$ ist:

**57-11(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \subset \{p\} \cup x$.

`ii)` *"$p$ Menge" und "$p \notin x$".*

<u>Beweis **57-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \subset \{p\} \cup x.$

`1`: Via **KG**$\cup$ gilt: $\{p\} \cup x = x \cup \{p\}.$

`2`: Aus `VS` gleich "$x \subset \{p\} \cup x$" und
aus `1`"$\{p\} \cup x = x \cup \{p\}$"
folgt: $x \subset x \cup \{p\}.$

`3`: Aus `2`"$x \subset x \cup \{p\}$"
folgt via **57-7**: $\exists \Omega : (\Omega \notin x) \wedge (\Omega \in \{p\}).$

`4`: Aus `3`"$\ldots \Omega \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $(\Omega = p) \wedge (p \text{ Menge}).$

`5`: Aus `3`"$\ldots \Omega \notin x \ldots$" und
aus `4`"$\Omega = p \ldots$"
folgt: $p \notin x.$

`6`: Aus `4`"$\ldots p$ Menge" und
aus `5`"$p \notin x$"
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \notin x).$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (p \notin x).$

`1`: Aus `VS` gleich "$p$ Menge..."
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}.$

`2`: Aus `VS` gleich "$\ldots p \notin x$" und
aus `1`"$p \in \{p\}$"
folgt via **57-7**: $x \subset x \cup \{p\}.$

`3`: Via **KG**$\cup$ gilt: $x \cup \{p\} = \{p\} \cup x.$

`4`: Aus `2`"$x \subset x \cup \{p\}$" und
aus `3`"$x \cup \{p\} = \{p\} \cup x$"
folgt: $x \subset \{p\} \cup x.$

$\square$

**57-12.** Im $\subset$**InduktionsSatz Klassen** wird fest gestellt, dass jede Klasse ungleich $\mathcal{U}$ eine echte TeilKlasse einer - anderen - Klasse ist:

**57-12(Satz)** ($\subset$**InduktionsSatz Klassen**)

*Es gelte:*

$\rightarrow$) $E \neq \mathcal{U}$.

*Dann folgt:*

a) $\exists \Omega : E \subset \{\Omega\} \cup E$.

b) $\exists \Psi : E \subset \Psi$.

Beweis **57-12** a)

1: Aus $\rightarrow$) "$E \neq \mathcal{U}$"
folgt via **0-21**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \notin E)$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$" und
aus 1"$\ldots \Omega \notin E$"
folgt via **57-11**: $E \subset \{\Omega\} \cup E$.

3: Aus 1"$\exists \Omega \ldots$" und
aus 2"$E \subset \{\Omega\} \cup E$"
folgt: $\exists \Omega : E \subset \{\Omega\} \cup E$.

b)

1: Aus $\rightarrow$) "$E \neq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\exists \Omega : E \subset \{\Omega\} \cup E$.

2: Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = \{\Omega\} \cup E$.

3: Aus 1"$\ldots E \subset \{\Omega\} \cup E$" und
aus 2"$\ldots \Psi = \{\Omega\} \cup E$"
folgt: $E \subset \Psi$.

4: Aus 2"$\exists \Psi \ldots$" und
aus 3"$E \subset \Psi$"
folgt: $\exists \Psi : E \subset \Psi$.

□

**57-13.** Im **⊂InduktionsSatz Mengen** wird fest gehalten, dass jede Menge echte TeilKlasse einer - anderen - *Menge* ist:

**57-13(Satz) (⊂InduktionsSatz Mengen)**

*Es gelte:*

→) $E$ *Menge.*

*Dann folgt:*

a) $\exists\Omega$: $E \subset \{\Omega\} \cup E$.

b) $\exists\Psi : (\Psi \textit{ Menge}) \wedge (E \subset \Psi)$.

Beweis **57-13**

1: Aus →) "$E$ Menge"
folgt via **0-17**: $E \neq \mathcal{U}$.

2.a): Aus 1"$E \neq \mathcal{U}$"
folgt via **57-11**: $\exists\Omega : E \subset \{\Omega\} \cup E$.

3: Aus →) "$E$ Menge"
folgt via **2-28**: $\{\Omega\} \cup E$ Menge.

4: Es gilt: $\exists\Psi : \Psi = \{\Omega\} \cup E$.

5.1: Aus 4"$\ldots \Psi = \{\Omega\} \cup E$" und
aus 3"$\{\Omega\} \cup E$ Menge"
folgt: $\Psi$ Menge.

5.2: Aus 2.a) "$\ldots E \subset \{\Omega\} \cup E$" und
aus 4"$\ldots \Psi = \{\Omega\} \cup E$"
folgt: $E \subset \Psi$.

6.b): Aus 4"$\exists\Psi \ldots$",
aus 5.1"$\Psi$ Menge" und
aus 5.2"$E \subset \Psi$"
folgt: $\exists\Psi : (\Psi \text{ Menge}) \wedge (E \subset \Psi)$.

□

**57-14.** Im $\subset$**InduktionsSatz endliche Klassen** wird fest gehalten, dass jede endliche Klasse echte TeilKlasse einer - anderen - *endlichen* Klasse ist:

**57-14(Satz)** **($\subset$InduktionsSatz endliche Klassen)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) $E$ *endlich.*

*Dann folgt:*

a) $\exists\Omega : E \subset \{\Omega\} \cup E$.

b) $\exists\Psi : (\Psi$ *endlich*$) \wedge (E \subset \Psi)$.

Beweis **57-14**

1: Aus $\rightarrow$)"$E$ endlich"
folgt via **28-6**: $E$ Menge.

2.a): Aus 1"$E$ Menge"
folgt via $\subset$**InduktionsSatz Mengen**: $\exists\Omega : E \subset \{\Omega\} \cup E$.

3: Aus $\rightarrow$)"$E$ endlich"
folgt via **EndlichkeitsAxiom**: $\{\Omega\} \cup E$ endlich.

4: Es gilt: $\exists\Psi : \Psi = \{\Omega\} \cup E$.

5.1: Aus 4"$\ldots \Psi = \{\Omega\} \cup E$" und
aus 3"$\{\Omega\} \cup E$ endlich"
folgt: $\Psi$ endlich.

5.2: Aus 2.a)"$\ldots E \subset \{\Omega\} \cup E$" und
aus 4"$\ldots \Psi = \{\Omega\} \cup E$"
folgt: $E \subset \Psi$.

6.b): Aus 4"$\exists\Psi \ldots$",
aus 5.1"$\Psi$ endlich" und
aus 5.2"$E \subset \Psi$"
folgt: $\exists\Psi : (\Psi$ endlich$) \wedge (E \subset \Psi)$.

□

**57-15.** In der folgenden Aufzählung sind die "Transitivitätseigenschaften" von $\subset$ zusammengefasst:

**57-15(Satz)**

a) *Aus* "$x \subset y$" *und* "$y \subset z$" *folgt* "$x \subset z$".

b) *Aus* "$x \subseteq y$" *und* "$y \subset z$" *folgt* "$x \subset z$".

c) *Aus* "$x \subset y$" *und* "$y \subseteq z$" *folgt* "$x \subset z$".

<u>Beweis</u> **57-15** `a)` `VS` gleich $(x \subset y) \wedge (y \subset z)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \subset y \dots$”
folgt via **57-1(Def)**: `A1` | “$x \subseteq y$”

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\dots y \subset z$”
folgt via **57-1(Def)**: `A2` | “$y \subseteq z$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$x \subseteq y$” und
aus `A2` gleich “$y \subseteq z$”
folgt via **0-6**: `A3` | “$x \subseteq z$”

`1.4:` Es gilt: $(x = z) \vee (x \neq z)$.

`Fallunterscheidung`

`1.4.1.Fall` $x = z$.

`2:` Aus `A2` gleich “$y \subseteq z$” und
aus `1.4.1.Fall`“$x = z$”
folgt: $y \subseteq x$.

`3.1:` Aus `A1` gleich “$x \subseteq y$” und
aus `2`“$y \subseteq x$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = y$.

`3.2:` Aus `VS` gleich “$x \subset y \dots$”
folgt via **57-1(Def)**: $x \neq y$.

`6:` Es gilt `3.1`“$x = y$” .
Es gilt `3.2`“$x \neq y$” .
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq z$.

`1.4.2.Fall` $x \neq z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A4` | “$x \neq z$”

`1.5:` Aus `A3` gleich “$x \subseteq z$” und
aus `A4` gleich “$x \neq z$”
folgt via **57-1(Def)**: $x \subset z$.

Beweis **57-15** `b)` `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (y \subset z)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y \ldots$"
folgt via **57-3**: $(x \subset y) \vee (x = y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \subset y$.

Aus `1.1.Fall`"$x \subset y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \subset z$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \subset z$.

`1.2.Fall` $x = y$.

Aus `1.2.Fall`"$x = y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \subset z$"
folgt: $x \subset z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \subset z$.

`c)` `VS` gleich $(x \subset y) \wedge (y \subseteq z)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq z \ldots$"
folgt via **57-3**: $(y \subset z) \vee (y = z)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \subset z$.

Aus `VS` gleich "$x \subset y \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$y \subset z$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \subset z$.

`1.2.Fall` $y = z$.

Aus `VS` gleich "$x \subset y \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$y = z$"
folgt: $x \subset z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \subset z$.

□

**unten Nicht-Vollständig.**
**oben Nicht-Vollständig.**
**Nicht-Vollständig.**

**Ersterstellung: 23/04/07** **Letzte Änderung: 21/05/11**

**58-1.** Eine Klasse ist genau dann **(unten/oben) Nicht-Vollständig**, wenn sie *nicht* (unten/oben) Vollständig ist:

**58-1(Definition)**

1) "$M$ **unten Nicht-Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(M \text{ unten Vollständig}).$$

2) "$M$ **oben Nicht-Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(M \text{ oben Vollständig}).$$

3) "$M$ **Nicht-Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(M \text{ ist Vollständig}).$$

**58-2.** Via **49-3** ist eine Klasse genau dann unten Vollständig, wenn sie oben Vollständig ist und dies ist genau dann der Fall, wenn sie Vollständig ist. Durch Negation wird hieraus via **58-1(Def)** das folgende Resultat erhalten:

**58-2(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *$M$ Nicht-Vollständig.*

`ii)` *$M$ unten Nicht-Vollständig.*

`iii)` *$M$ oben Nicht-Vollständig.*

Beweis **58-2**

`1:` Via **49-3** gilt:
$$(M \text{ Vollständig}) \Leftrightarrow (M \text{ unten Vollständig}) \Leftrightarrow (M \text{ oben Vollständig}).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$(\neg(M \text{ Vollständig})) \Leftrightarrow (\neg(M \text{ unten Vollständig})) \Leftrightarrow (\neg(M \text{ oben Vollständig})).$$

`3:` Aus `2`
folgt via **58-1(Def)**:
$$(M \text{ Nicht-Vollständig}) \Leftrightarrow (\neg(M \text{ unten Vollständig})) \Leftrightarrow (\neg(M \text{ oben Vollständig})).$$

`4:` Aus `3`
folgt via **58-1(Def)**:
$$(M \text{ Nicht-Vollständig}) \Leftrightarrow (M \text{ unten Nicht-Vollständig}) \Leftrightarrow (\neg(M \text{ oben Vollständig})).$$

`5:` Aus `4`
folgt via **58-1(Def)**:
$$(M \text{ Nicht-Vollständig}) \Leftrightarrow (M \text{ unten Nicht-Vollständig}) \Leftrightarrow (M \text{ oben Nicht-Vollständig}).$$

□

**58-3.** Falls $M$ Nicht-Vollständig ist, dann gibt es mindestens eine Klasse mit bemerkenswerten Eigenschaften:

**58-3(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$M$ Nicht-Vollständig.*

*Dannn folgt:*

a) $\exists \Omega, \Psi : (0 \neq \Omega) \wedge (\Psi$ *untere M_Schranke von* $\Omega)$
$\wedge(\Omega$ *hat kein M_Infimum*$)$.

b) $\exists \Phi, \Upsilon : (0 \neq \Phi) \wedge (\Upsilon$ *obere M_Schranke von* $\Phi)$
$\wedge(\Phi$ *hat kein M_Supremum*$)$.

<u>Beweis</u> **58-3** `a)` `VS` gleich $M$ Nicht-Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ Nicht-Vollständig"
folgt via **58-2**: $M$ unten Nicht-Vollständig.

`2:` Aus `1` "$M$ unten Nicht-Vollständig"
folgt via **58-1(Def)**: $\neg(M$ unten Vollständig$)$.

`3:` Aus `2` "$\neg(M$ unten Vollständig$)$"
folgt via **49-1(Def)**:

$$\neg\big(\forall\alpha,\beta: ((0\neq\alpha)\wedge(\beta \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \alpha)) \Rightarrow (\exists\Upsilon: \Upsilon \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha)\big).$$

`4:` Aus `3`
folgt:

$$\exists\Omega,\Psi: (0\neq\Omega)\wedge(\Psi \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge(\neg(\exists\Upsilon: \Upsilon \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega)).$$

`5:` Via **36-1(Def)** gilt:

$$\neg(\exists\Upsilon: \Upsilon \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega) \Leftrightarrow (\Omega \text{ hat kein } M\text{\_Infimum}).$$

`6:` Aus `4` und `5`
folgt:

$$\exists\Omega,\Psi: (0\neq\Omega)\wedge(\Psi \text{ untere } M\text{\_Schranke von } \Omega) \wedge(\Omega \text{ hat kein } M\text{\_Infimum}).$$

`b)` `VS` gleich $M$ Nicht-Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ Nicht-Vollständig"
folgt via **58-2**: $M$ oben Nicht-Vollständig.

`2:` Aus `1` "$M$ oben Nicht-Vollständig"
folgt via **58-1(Def)**: $\neg(M$ oben Vollständig$)$.

`3:` Aus `2` "$\neg(M$ oben Vollständig$)$"
folgt via **49-1(Def)**:

$$\neg\big(\forall\alpha,\beta: ((0\neq\alpha)\wedge(\beta \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \alpha)) \Rightarrow (\exists\Upsilon: \Upsilon \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha)\big).$$

`4:` Aus `3`
folgt:

$$\exists\Phi,\Upsilon: (0\neq\Phi)\wedge(\Upsilon \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \Phi) \wedge(\neg(\exists\Upsilon: \Upsilon \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Phi)).$$

`5:` Via **36-1(Def)** gilt:

$$\neg(\exists\Upsilon: \Upsilon \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Phi) \Leftrightarrow (\Phi \text{ hat kein } M\text{\_Supremum}).$$

`6:` Aus `4` und `5`
folgt:

$$\exists\Phi,\Upsilon: (0\neq\Phi)\wedge(\Upsilon \text{ obere } M\text{\_Schranke von } \Phi) \wedge(\Phi \text{ hat kein } M\text{\_Supremum}).$$

□

**58-4.** Falls es eine nicht leere Klasse $E$ gibt, die zwar eine untere $M$_Schranke aber kein $M$_Infimum hat, dann ist $M$ Nicht-Vollständig:

**58-4(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) $0 \neq E$.

$\rightarrow$) *$u$ untere $M$_Schranke von $E$.*

$\rightarrow$) *$E$ hat kein $M$_Infimum.*

*Dann folgt "$M$ Nicht-Vollständig".*

Beweis **58-4**

1: Es gilt: $(M \text{ Vollständig}) \vee (\neg(M \text{ Vollständig}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $M$ Vollständig.

2: Aus `1.1.Fall` "$M$ Vollständig" folgt via **49-3**: $M$ unten Vollständig.

3: Aus 2 "$M$ unten Vollständig", aus $\rightarrow$) "$0 \neq E$" und aus $\rightarrow$) "$u$ untere $M$_Schranke von $E$" folgt via **49-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_Infimum von $E$.

4: Aus $\rightarrow$) "$E$ hat kein $M$_Infimum" folgt via **36-22**: $\Omega$ kein $M$_Infimum von $E$.

5: Aus 4 "$\Omega$ kein $M$_Infimum von $E$" folgt via **36-1(Def)**: $\neg(\Omega$ ist $M$_Infimum von $E)$.

6: Es gilt 3 "... $\Omega$ ist $M$_Infimum von $E$".
Es gilt 5 "$\neg(\Omega$ ist $M$_Infimum von $E)$".
Ex falso quodlibet folgt: $M$ Nicht-Vollständig.

`1.2.Fall` $\neg(M$ Vollständig$)$.

Aus `1.2.Fall` "$\neg(M$ Vollständig$)$" folgt via **58-1(Def)**: $M$ Nicht-Vollständig.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $M$ Nicht-Vollständig.

□

**58-5.** Falls es eine nicht leere Klasse $E$ gibt, die zwar eine obere $M$_Schranke aber kein $M$_Supremum hat, dann ist $M$ Nicht-Vollständig:

**58-5(Satz)**

*Es gelte:*

→) $0 \neq E$.

→) *o obere $M$_Schranke von $E$.*

→) *$E$ hat kein $M$_Supremum.*

*Dann folgt "$M$ Nicht-Vollständig".*

Beweis **58-5**

1: Es gilt: $(M \text{ Vollständig}) \vee (\neg(M \text{ Vollständig}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $M$ Vollständig.

2: Aus `1.1.Fall` "$M$ Vollständig" folgt via **49-3**: $M$ oben Vollständig.

3: Aus 2 "$M$ oben Vollständig", aus →) "$0 \neq E$" und aus →) "$o$ obere $M$_Schranke von $E$" folgt via **49-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_Supremum von $E$.

4: Aus →) "$E$ hat kein $M$_Supremum" folgt via **36-22**: $\Omega$ kein $M$_Supremum von $E$.

5: Aus 4 "$\Omega$ kein $M$_Supremum von $E$" folgt via **36-1(Def)**: $\neg(\Omega$ ist $M$_Supremum von $E)$.

6: Es gilt 3 "$\ldots \Omega$ ist $M$_Supremum von $E$". Es gilt 5 "$\neg(\Omega$ ist $M$_Supremum von $E)$". Ex falso quodlibet folgt: $M$ Nicht-Vollständig.

`1.2.Fall` $\neg(M$ Vollständig$)$.

Aus `1.2.Fall` "$\neg(M$ Vollständig$)$" folgt via **58-1(Def)**: $M$ Nicht-Vollständig.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $M$ Nicht-Vollständig.

□

**unten Nicht-Stark-Vollständig.**
**oben Nicht-Stark-Vollständig.**
**Nicht-Stark-Vollständig.**

**Ersterstellung: 15/05/07** **Letzte Änderung: 21/05/11**

**59-1.** Eine Klasse ist genau dann **(unten/oben) Nicht-Stark-Vollständig**, wenn sie *nicht* (unten/oben) Stark Vollständig ist:

**59-1(Definition)**

1) "$M$ **unten Nicht-Stark-Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(M \text{ unten Stark Vollständig}).$$

2) "$M$ **oben Nicht-Stark-Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(M \text{ oben Stark Vollständig}).$$

3) "$M$ **Nicht-Stark-Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(M \text{ Stark Vollständig}).$$

**59-2.** Falls $M$ unten Nicht-Stark-Vollständig ist, dann gibt es eine nicht leere TeilKlasse von $\mathsf{ran}\, M$, die kein $M$_Infimum hat. Falls eine nicht leere TeilKlasse von $\mathsf{ran}\, M$ kein $M$_Infimum hat, dann ist $M$ unten Nicht-Stark-Vollständig:

**59-2(Satz)**

a) *Aus "$M$ unten Nicht-Stark-Vollständig"*
*folgt "$\exists \Omega : (0 \neq \Omega \subseteq \mathsf{ran}\, M) \wedge (\Omega$ hat kein $M$_Infimum)".*

b) *Aus "$0 \neq E \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und "$E$ hat kein $M$_Infimum"*
*folgt "$M$ unten Nicht-Stark-Vollständig".*

Beweis **59-2** `a)` `VS` gleich $M$ unten Nicht-Stark-Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ unten Nicht-Stark-Vollständig"
folgt via **59-1(Def)**: $\neg(M$ unten Stark Vollständig).

`2:` Aus `1`"$\neg(M$ unten Stark Vollständig)"
folgt via **50-1(Def)**:
$\neg(\forall\alpha : (0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\exists\Psi : \Psi$ ist $M$_Infimum von $\alpha))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists\Omega : (0 \neq \Omega \subseteq \mathsf{ran}\, M) \wedge (\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist $M$_Infimum von $\Omega))$.

`4:` Via **36-1(Def)** gilt: $\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist $M$_Infimum von $\Omega)$
$\Leftrightarrow (\Omega$ hat kein $M$_Infimum).

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $\exists\Omega : (0 \neq \Omega \subseteq \mathsf{ran}\, M) \wedge (\Omega$ hat kein $M$_Infimum).

`b)` `VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathsf{ran}\, M) \wedge (E$ hat kein $M$_Infimum).

`1:` Es gilt: $(M$ unten Stark Vollständig$) \vee (\neg(M$ unten Stark Vollständig)).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $M$ unten Stark Vollständig.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$M$ unten Stark Vollständig" und
aus `VS` gleich "$0 \neq E \subseteq \mathsf{ran}\, M \ldots$"
folgt via **50-1(Def)**: $\exists\Omega : \Omega$ ist $M$_Infimum von $E$.

`4:` Aus →)"$E$ hat kein $M$_Infimum"
folgt via **36-22**: $\Omega$ kein $M$_Infimum von $E$.

`5:` Aus `4`"$\Omega$ kein $M$_Infimum von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg(\Omega$ ist $M$_Infimum von $E)$.

`6:` Es gilt `3`"$\ldots\Omega$ ist $M$_Infimum von $E$".
Es gilt `5`"$\neg(\Omega$ ist $M$_Infimum von $E)$".
Ex falso quodlibet folgt: $M$ unten Nicht-Stark-Vollständig.

`1.2.Fall` $\neg(M$ unten Stark Vollständig).

Aus `1.2.Fall`"$\neg(M$ unten Stark Vollständig)"
folgt via **59-1(Def)**: $M$ unten Nicht-Stark-Vollständig.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$M$ unten Nicht-Stark-Vollständig.

□

**59-3.** Falls $M$ oben Nicht-Stark-Vollständig ist, dann gibt es eine nicht leere TeilKlasse von $\mathsf{dom}\,M$, die kein $M$_Supremum hat. Falls eine nicht leere TeilKlasse von $\mathsf{dom}\,M$ kein $M$_Supremum hat, dann ist $M$ oben Nicht-Stark-Vollständig:

**59-3(Satz)**

a) *Aus "$M$ oben Nicht-Stark-Vollständig"*
*folgt "$\exists\Omega : (0 \neq \Omega \subseteq \mathsf{dom}\,M) \wedge (\Omega$ hat kein $M$_Supremum$)$".*

b) *Aus "$0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\,M$" und "$E$ hat kein $M$_Supremum"*
*folgt "$M$ oben Nicht-Stark-Vollständig".*

Beweis **59-3** `a)` `VS` gleich $M$ oben Nicht-Stark-Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ oben Nicht-Stark-Vollständig"
folgt via **59-1(Def)**: $\neg(M$ oben Stark Vollständig$)$.

`2:` Aus `1`"$\neg(M$ oben Stark Vollständig$)$"
folgt via **50-1(Def)**:
$\neg(\forall\alpha : (0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\exists\Psi : \Psi$ ist $M$_Supremum von $\alpha))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists\Omega : (0 \neq \Omega \subseteq \mathsf{dom}\, M) \wedge (\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist $M$_Supremum von $\Omega))$.

`4:` Via **36-1(Def)** gilt: $\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist $M$_Supremum von $\Omega)$
$\Leftrightarrow (\Omega$ hat kein $M$_Supremum$)$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $\exists\Omega : (0 \neq \Omega \subseteq \mathsf{dom}\, M) \wedge (\Omega$ hat kein $M$_Supremum$)$.

`b)` `VS` gleich $(0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, M) \wedge (E$ hat kein $M$_Supremum$)$.

`1:` Es gilt: $(M$ oben Stark Vollständig$) \vee (\neg(M$ oben Stark Vollständig$))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $M$ oben Stark Vollständig.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$M$ oben Stark Vollständig" und
aus `VS` gleich "$0 \neq E \subseteq \mathsf{dom}\, M \ldots$"
folgt via **50-1(Def)**: $\exists\Omega : \Omega$ ist $M$_Supremum von $E$.

`4:` Aus $\rightarrow)$"$E$ hat kein $M$_Supremum"
folgt via **36-22**: $\Omega$ kein $M$_Supremum von $E$.

`5:` Aus `4`"$\Omega$ kein $M$_Supremum von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg(\Omega$ ist $M$_Supremum von $E)$.

`6:` Es gilt `3`"$\ldots\Omega$ ist $M$_Supremum von $E$".
Es gilt `5`"$\neg(\Omega$ ist $M$_Supremum von $E)$".
Ex falso quodlibet folgt: $M$ oben Nicht-Stark-Vollständig.

`1.2.Fall` $\neg(M$ oben Stark Vollständig$)$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(M$ oben Stark Vollständig$)$"
folgt via **59-1(Def)**: $M$ oben Nicht-Stark-Vollständig.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$M$ oben Nicht-Stark-Vollständig.

□

**59-4.** Es folgen zwei spezielle Anwendungen von **59-2** und **59-3**:

**59-4(Satz)**

a) *Aus* “$0 \neq \mathsf{ran}\, M$” *und* “$\mathsf{ran}\, M$ *hat kein* $M$_*Infimum*” *folgt* “$M$ *unten Nicht-Stark-Vollständig*”.

b) *Aus* “$0 \neq \mathsf{dom}\, M$” *und* “$\mathsf{dom}\, M$ *hat kein* $M$_*Supremum*” *folgt* “$M$ *oben Nicht-Stark-Vollständig*”.

Beweis **59-4** a) VS gleich $(0 \neq \mathsf{ran}\, M) \wedge (\mathsf{ran}\, M$ hat kein $M$_Infimum$)$.

1: Aus VS gleich “$0 \neq \mathsf{ran}\, M \ldots$”
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

2: Aus 1“$0 \neq \mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, M$” und
aus VS gleich “$\ldots \mathsf{ran}\, M$ hat kein $M$_Infimum”
folgt via **59-2**: $M$ unten Nicht-Stark-Vollständig.

b) VS gleich $(0 \neq \mathsf{dom}\, M) \wedge (\mathsf{dom}\, M$ hat kein $M$_Supremum$)$.

1: Aus VS gleich “$0 \neq \mathsf{dom}\, M \ldots$”
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2: Aus 1“$0 \neq \mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, M$” und
aus VS gleich “$\ldots \mathsf{dom}\, M$ hat kein $M$_Supremum”
folgt via **59-3**: $M$ oben Nicht-Stark-Vollständig.

$\square$

**59-5.** Es werden logische Implikationen von (unten/oben) Nicht-Stark-Vollständigen präsentiert:

**59-5(Satz)**

a) *Aus "M unten Nicht-Stark-Vollständig" folgt "M Nicht-Stark-Vollständig".*

b) *Aus "M oben Nicht-Stark-Vollständig" folgt "M Nicht-Stark-Vollständig".*

c) *Aus "M Nicht-Stark-Vollständig" folgt "M unten Nicht-Stark-Vollständig" oder "M oben Nicht-Stark-Vollständig".*

Beweis **59-5** a) VS gleich $M$ unten Nicht-Stark-Vollständig.

1: Via **50-1(Def)** gilt:
($M$ Stark Vollständig) $\Rightarrow$ ($M$ unten Stark Vollständig).

2: Aus 1
folgt: ($\neg$($M$ unten Stark Vollständig)) $\Rightarrow$ ($\neg$($M$ Stark Vollständig)).

3: Via **59-1(Def)** gilt: $M$ unten Nicht-Stark-Vollständig
$\Leftrightarrow$ ($\neg$($M$ unten Stark Vollständig)).

4: Aus 2 und
aus 3
folgt:
($M$ unten Nicht-Stark-Vollständig) $\Rightarrow$ ($\neg$($M$ Stark Vollständig)).

5: Via **59-1(Def)** gilt: $M$ Nicht-Stark-Vollständig
$\Leftrightarrow$ ($\neg$($M$ Stark Vollständig)).

6: Aus 4 und
aus 5
folgt:
($M$ unten Nicht-Stark-Vollständig) $\Rightarrow$ ($M$ Nicht-Stark-Vollständig).

Beweis **59-5** `b)` `VS` gleich $M$ oben Nicht-Stark-Vollständig.

`1:` Via **50-1(Def)** gilt:
$$(M \text{ Stark Vollständig}) \Rightarrow (M \text{ oben Stark Vollständig}).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(M \text{ oben Stark Vollständig})) \Rightarrow (\neg(M \text{ Stark Vollständig})).$$

`3:` Via **59-1(Def)** gilt: $$M \text{ oben Nicht-Stark-Vollständig} \Leftrightarrow (\neg(M \text{ oben Stark Vollständig})).$$

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt:
$$(M \text{ oben Nicht-Stark-Vollständig}) \Rightarrow (\neg(M \text{ Stark Vollständig})).$$

`5:` Via **59-1(Def)** gilt: $$M \text{ Nicht-Stark-Vollständig} \Leftrightarrow (\neg(M \text{ Stark Vollständig})).$$

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt:
$$(M \text{ oben Nicht-Stark-Vollständig}) \Rightarrow (M \text{ Nicht-Stark-Vollständig}).$$

`c)`

`1:`
$$\begin{aligned} & M \text{ Nicht-Stark-Vollständig} \\ \overset{\textbf{59-1(Def)}}{\Leftrightarrow}\ & \neg(M \text{ Stark Vollständig}) \\ \overset{\textbf{50-1(Def)}}{\Leftrightarrow}\ & \neg((M \text{ unten Stark Vollständig}) \wedge (M \text{ oben Stark Vollständig})) \\ \Leftrightarrow\ & (\neg(M \text{ unten Stark Vollständig})) \vee (\neg(M \text{ oben Stark Vollständig})) \\ \overset{\textbf{59-1(Def)}}{\Leftrightarrow}\ & (M \text{ unten Nicht-Stark-Vollständig}) \\ & \vee(\neg(M \text{ oben Stark Vollständig})) \\ \overset{\textbf{59-1(Def)}}{\Leftrightarrow}\ & (M \text{ unten Nicht-Stark-Vollständig}) \\ & \vee(M \text{ oben Nicht-Stark-Vollständig}). \end{aligned}$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$\begin{aligned} & M \text{ Nicht-Stark-Vollständig} \\ \Rightarrow\ & ((M \text{ unten Nicht-Stark-Vollständig}) \\ & \vee(M \text{ oben Nicht-Stark-Vollständig})). \end{aligned}$$

□

**59-6.** Es werden Implikationen rund um “Nicht-Vollständig” und “(unten/oben) Nicht-Stark-Vollständig” angegeben:

**59-6(Satz)**

a) *Aus “M Nicht-Vollständig” folgt “M unten Nicht-Stark-Vollständig”.*

b) *Aus “M Nicht-Vollständig” folgt “M oben Nicht-Stark-Vollständig”.*

c) *Aus “M Nicht-Vollständig” folgt “M Nicht-Stark-Vollständig”.*

Beweis **59-6** a)

1: Via **50-2** gilt: $(M$ unten Stark Vollständig$) \Rightarrow (M$ Vollständig$)$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg(M$ Vollständig$)) \Rightarrow (\neg(M$ unten Stark Vollständig$))$.

3: Via **58-1(Def)** gilt: $(M$ Nicht-Vollständig$) \Leftrightarrow (\neg(M$ Vollständig$))$.

4: Aus 2 und aus 3 folgt: $(M$ Nicht-Vollständig$) \Rightarrow (\neg(M$ unten Stark Vollständig$))$.

5: Via **59-1(Def)** gilt: $(M$ unten Nicht-Stark-Vollständig$) \Leftrightarrow (\neg(M$ ist unten Stark Vollständig$))$.

6: Aus 4 und aus 5 folgt: $(M$ Nicht-Vollständig$) \Rightarrow (M$ unten Nicht-Stark-Vollständig$)$.

<u>Beweis **59-6**</u> `b)`

`1:` Via **50-2** gilt: $(M \text{ oben Stark Vollständig}) \Rightarrow (M \text{ Vollständig})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(M \text{ Vollständig})) \Rightarrow (\neg(M \text{ oben Stark Vollständig}))$.

`3:` Via **58-1(Def)** gilt: $(M \text{ Nicht-Vollständig}) \Leftrightarrow (\neg(M \text{ Vollständig}))$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $(M \text{ Nicht-Vollständig}) \Rightarrow (\neg(M \text{ oben Stark Vollständig}))$.

`5:` Via **59-1(Def)** gilt: $(M \text{ oben Nicht-Stark-Vollständig})$
$\Leftrightarrow (\neg(M \text{ ist oben Stark Vollständig}))$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $(M \text{ Nicht-Vollständig}) \Rightarrow (M \text{ oben Nicht-Stark-Vollständig})$.

`c)`

`1:` Via **50-2** gilt: $(M \text{ Stark Vollständig}) \Rightarrow (M \text{ Vollständig})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(M \text{ Vollständig})) \Rightarrow (\neg(M \text{ Stark Vollständig}))$.

`3:` Via **58-1(Def)** gilt: $(M \text{ Nicht-Vollständig}) \Leftrightarrow (\neg(M \text{ Vollständig}))$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $(M \text{ Nicht-Vollständig}) \Rightarrow (\neg(M \text{ Stark Vollständig}))$.

`5:` Via **59-1(Def)** gilt: $(M \text{ Nicht-Stark-Vollständig})$
$\Leftrightarrow (\neg(M \text{ Stark Vollständig}))$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $(M \text{ Nicht-Vollständig}) \Rightarrow (M \text{ Nicht-Stark-Vollständig})$.

$\square$

**unten Nicht-Total-Vollständig.**
**oben Nicht-Total-Vollständig.**
**Nicht-Total-Vollständig.**

**Ersterstellung: 19/05/07** **Letzte Änderung: 21/05/11**

**60-1.** Eine Klasse ist genau dann **(unten/oben) Nicht-Total-Vollständig**, wenn sie *nicht* (unten/oben) Total Vollständig ist:

**60-1(Definition)**

1) "$M$ **unten Nicht-Total-Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(M \text{ unten Total Vollständig}).$$

2) "$M$ **oben Nicht-Total-Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(M \text{ oben Total Vollständig}).$$

3) "$M$ **Nicht-Total-Vollständig**" genau dann, wenn gilt:

$$\neg(M \text{ Total Vollständig}).$$

**60-2.** Da via **51-3** eine Klasse genau dann unten Total Vollständig ist, wenn sie oben Total Vollständig ist und dies genau dann der Fall ist, wenn sie Total Vollständig ist, ist das folgende Kriterium nicht allzu überraschend:

**60-2(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *M Nicht-Total-Vollständig.*

`ii)` *M unten Nicht-Total-Vollständig.*

`iii)` *M oben Nicht-Total-Vollständig.*

Beweis **60-2**

`1:` Via **51-3** gilt:

$$(M \text{ Total Vollständig}) \Leftrightarrow (M \text{ unten Total Vollständig}) \Leftrightarrow (M \text{ oben Total Vollständig}).$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$(\neg(M \text{ Total Vollständig})) \Leftrightarrow (\neg(M \text{ unten Total Vollständig})) \Leftrightarrow (\neg(M \text{ oben Total Vollständig})).$$

`3:` Aus `2` folgt via **60-1(Def)**:

$$(M \text{ Nicht-Total-Vollständig}) \Leftrightarrow (\neg(M \text{ unten Total Vollständig})) \Leftrightarrow (\neg(M \text{ oben Total Vollständig})).$$

`4:` Aus `3` folgt via **60-1(Def)**:

$$(M \text{ Nicht-Total-Vollständig}) \Leftrightarrow (M \text{ unten Nicht-Total-Vollständig}) \Leftrightarrow (\neg(M \text{ oben Total Vollständig})).$$

`5:` Aus `4` folgt via **60-1(Def)**:

$$(M \text{ Nicht-Total-Vollständig}) \Leftrightarrow (M \text{ unten Nicht-Total-Vollständig}) \Leftrightarrow (M \text{ oben Nicht-Total-Vollständig}).$$

□

**60-3.** Falls $M$ Nicht-Total-Total Vollständig ist, dann gibt es mindestens eine Klasse mit bemerkenswerten Eigenschaften:

**60-3(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$M$ Nicht-Total-Vollständig.*

*Dannn folgt:*

a) $\exists\Omega : (\Omega \subseteq \mathsf{ran}\, M) \wedge (\Omega$ *hat kein* $M$_*Infimum*$)$.

b) $\exists\Omega : (\Omega \subseteq \mathsf{dom}\, M) \wedge (\Omega$ *hat kein* $M$_*Supremum*$)$.

<u>Beweis **60-3**</u> `a)` `VS` gleich $M$ Nicht-Total-Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ Nicht-Total-Vollständig"
folgt via **60-2**: $M$ unten Nicht-Total-Vollständig.

`2:` Aus `1` "$M$ unten Nicht-Total-Vollständig"
folgt via **60-1(Def)**: $\neg(M$ unten Total Vollständig$)$.

`3:` Aus `2` "$\neg(M$ unten Total Vollständig$)$"
folgt via **51-1(Def)**:
$$\neg\big(\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\exists\Xi : \Xi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \alpha)\big).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \subseteq \mathsf{ran}\, M) \wedge (\neg(\exists\Xi : \Xi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega))$.

`5:` Via **36-1(Def)** gilt: $\neg(\exists\Xi : \Xi \text{ ist } M\text{\_Infimum von } \Omega)$
$\Leftrightarrow (\Omega \text{ hat kein } M\text{\_Infimum})$.

`6:` Aus `4` und
`5`
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \subseteq \mathsf{ran}\, M) \wedge (\Omega \text{ hat kein } M\text{\_Infimum})$.

`b)` `VS` gleich $M$ Nicht-Total-Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ Nicht-Total-Vollständig"
folgt via **60-2**: $M$ oben Nicht-Total-Vollständig.

`2:` Aus `1` "$M$ oben Nicht-Total-Vollständig"
folgt via **60-1(Def)**: $\neg(M$ oben Total Vollständig$)$.

`3:` Aus `2` "$\neg(M$ oben Total Vollständig$)$"
folgt via **51-1(Def)**:
$$\neg\big(\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\exists\Xi : \Xi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \alpha)\big).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \subseteq \mathsf{ran}\, M) \wedge (\neg(\exists\Xi : \Xi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Omega))$.

`5:` Via **36-1(Def)** gilt: $\neg(\exists\Xi : \Xi \text{ ist } M\text{\_Supremum von } \Omega)$
$\Leftrightarrow (\Omega \text{ hat kein } M\text{\_Supremum})$.

`6:` Aus `4` und
`5`
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \subseteq \mathsf{ran}\, M) \wedge (\Omega \text{ hat kein } M\text{\_Supremum})$.

$\square$

**60-4.** Falls es eine TeilKlasse von $\mathsf{ran}\,M$ gibt, die kein $M$_Infimum hat, dann ist $M$ Nicht-Total-Vollständig:

> **60-4(Satz)**
>
> *Es gelte:*
>
> $\rightarrow$) $E \subseteq \mathsf{ran}\,M$.
>
> $\rightarrow$) *$E$ hat kein $M$_Infimum.*
>
> *Dann folgt "$M$ Nicht-Total-Vollständig".*

Beweis **60-4**

1: Es gilt: $(M$ Total Vollständig$) \vee (\neg(M$ Total Vollständig$))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $M$ Total Vollständig.

2: Aus `1.1.Fall` "$M$ Total Vollständig"
folgt via **51-3**: $M$ unten Total Vollständig.

3: Aus 2 "$M$ unten Total Vollständig"
und aus $\rightarrow$) "$E \subseteq \mathsf{ran}\,M$"
folgt via **51-1(Def)**: $\exists\Omega : \Omega$ ist $M$_Infimum von $E$.

4: Aus $\rightarrow$) "$E$ hat kein $M$_Infimum"
folgt via **36-22**: $\Omega$ kein $M$_Infimum von $E$.

5: Aus 4 "$\Omega$ kein $M$_Infimum von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg(\Omega$ ist $M$_Infimum von $E)$.

6: Es gilt 3 "$\ldots\Omega$ ist $M$_Infimum von $E$".
Es gilt 5 "$\neg(\Omega$ ist $M$_Infimum von $E)$".
Ex falso quodlibet folgt: $M$ Nicht-Total-Vollständig.

`1.2.Fall` $\neg(M$ Total Vollständig$)$.

Aus `1.2.Fall` "$\neg(M$ Total Vollständig$)$"
folgt via **60-1(Def)**: $M$ Nicht-Total-Vollständig.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$M$ Nicht-Total-Vollständig.

□

**60-5.** Falls es eine TeilKlasse von $\mathsf{dom}\, M$ gibt, die kein $M$_Supremum hat, dann ist $M$ Nicht-Total-Vollständig:

**60-5(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow)$ $E \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

$\rightarrow)$ *$E$ hat kein $M$_Supremum.*

*Dann folgt "$M$ Nicht-Total-Vollständig".*

Beweis **60-5**

1: Es gilt: $(M$ Total Vollständig$) \vee (\neg(M$ Total Vollständig$))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $M$ Total Vollständig.

2: Aus `1.1.Fall` "$M$ Total Vollständig" folgt via **51-3**: $M$ oben Total Vollständig.

3: Aus 2 "$M$ oben Total Vollständig" und aus $\rightarrow)$ "$E \subseteq \mathsf{dom}\, M$" folgt via **51-1(Def)**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $M$_Supremum von $E$.

4: Aus $\rightarrow)$ "$E$ hat kein $M$_Supremum" folgt via **36-22**: $\Omega$ kein $M$_Supremum von $E$.

5: Aus 4 "$\Omega$ kein $M$_Supremum von $E$" folgt via **36-1(Def)**: $\neg(\Omega$ ist $M$_Supremum von $E)$.

6: Es gilt 3 "$\ldots \Omega$ ist $M$_Supremum von $E$". Es gilt 5 "$\neg(\Omega$ ist $M$_Supremum von $E)$". Ex falso quodlibet folgt: $M$ Nicht-Total-Vollständig.

`1.2.Fall` $\neg(M$ Total Vollständig$)$.

Aus `1.2.Fall` "$\neg(M$ Total Vollständig$)$" folgt via **60-1(Def)**: $M$ Nicht-Total-Vollständig.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $M$ Nicht-Total-Vollständig.

□

**60-6.** Durch Spezialisierung ist aus **60-4** und **60-5** das folgende Resultat zu gewinnen:

**60-6(Satz)**

a) *Aus* "$\mathsf{ran}\, M$ *hat kein* $M$_*Infimum*" *folgt* "$M$ *Nicht-Total-Vollständig*".

b) *Aus* "$\mathsf{dom}\, M$ *hat kein* $M$_*Supremum*" *folgt* "$M$ *Nicht-Total-Vollständig*".

Beweis **60-6** a) VS gleich $\mathsf{ran}\, M$ hat kein $M$_Infimum.

1: Via **0-6** gilt: $\mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

2: Aus 1"$\mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, M$" und
aus VS gleich "$\mathsf{ran}\, M$ hat kein $M$_Infimum"
folgt via **60-4**: $M$ Nicht-Total-Vollständig.

b) VS gleich $\mathsf{dom}\, M$ hat kein $M$_Supremum.

1: Via **0-6** gilt: $\mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2: Aus 1"$\mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, M$" und
aus VS gleich "$\mathsf{dom}\, M$ hat kein $M$_Supremum"
folgt via **60-5**: $M$ Nicht-Total-Vollständig.

□

**60-7.** In übersichtlicher Form wird auf Basis der anderen "Vollständigkeits-Begriffe" Hinreichendes für "Nicht-Total-Vollständig" zusammengefasst.
Die Beweis-Reihefolge ist `d) - a) - b) - c)`:

**60-7(Satz)**

`a)` *Aus "M Nicht-Vollständig" folgt "M Nicht-Total-Vollständig".*

`b)` *Aus "M unten Nicht-Stark-Vollständig" folgt "M Nicht-Total-Vollständig".*

`c)` *Aus "M oben Nicht-Stark-Vollständig" folgt "M Nicht-Total-Vollständig".*

`d)` *Aus "M Nicht-Stark-Vollständig" folgt "M Nicht-Total-Vollständig".*

Beweis **60-7** `d)`

`1:` Via **51-4** gilt: $(M$ Total Vollständig$) \Rightarrow (M$ Stark Vollständig$)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(M$ Stark Vollständig$)) \Rightarrow (\neg(M$ Total Vollständig$))$.

`3:` Via **59-1(Def)** gilt:
$(M$ Nicht-Stark-Vollständig$) \Leftrightarrow (\neg(M$ Stark-Vollständig$))$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $(M$ Nicht-Stark-Vollständig$) \Rightarrow (\neg(M$ Total Vollständig$))$.

`5:` Via **60-1(Def)** gilt: $(M$ Nicht-Total-Vollständig$)$
$\Leftrightarrow (\neg(M$ Total Vollständig$))$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $(M$ Nicht-Stark-Vollständig$) \Rightarrow (M$ Nicht-Total-Vollständig$)$.

<u>Beweis</u> **60-7** `a)` `VS` gleich $M$ Nicht-Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ Nicht-Vollständig"
folgt via **59-6**: $M$ Nicht-Stark-Vollständig.

`2:` Aus `1`"$M$ Nicht-Stark-Vollständig"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $M$ Nicht-Total-Vollständig.

`b)` `VS` gleich $M$ unten Nicht-Stark-Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ unten Nicht-Stark-Vollständig"
folgt via **59-5**: $M$ Nicht-Stark-Vollständig.

`2:` Aus `1`"$M$ Nicht-Stark-Vollständig"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $M$ Nicht-Total-Vollständig.

`c)` `VS` gleich $M$ oben Nicht-Stark-Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ oben Nicht-Stark-Vollständig"
folgt via **59-5**: $M$ Nicht-Stark-Vollständig.

`2:` Aus `1`"$M$ Nicht-Stark-Vollständig"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $M$ Nicht-Total-Vollständig.

$\square$

**Universelle InklusionsRelation**. sse.

sse-**Notation**.

Die Frage, ob sse oben Stark KettenVollständig ist, bleibt offen.

**Ersterstellung: 04/05/07** **Letzte Änderung: 02/06/11**

**61-1.** Die **universelle InklusionsRelation** besteht aus allen geordneten Paaren $(p, q)$ von *Mengen* $p, q$, für die $p \subseteq q$ gilt. Diese - auf den ersten Blick sehr einfach erscheinende - Relation induziert in Klassen "TeilKlassen-Relationen", die bei der Weiterentwicklung der FixpunktSätze von Tarski von grosser Bedeutung sind:

**61-1(Definition)**

1) $\mathsf{sse}$

$$= \mathsf{61.0}() = \{(\lambda, \mu) : \lambda \subseteq \mu\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **universelle InklusionsRelation**"

genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{sse}.$$

**61-2.** Routinemäßig wird **61-1(Def)** durch in dieser Form erwartete Aussagen ergänzt:

**61-2(Satz)**

a) $\mathsf{sse}$ *universelle InklusionsRelation.*

b) *Aus* “$\mathfrak{C}$ *universelle InklusionsRelation*”
*und* “$\mathfrak{D}$ *universelle InklusionsRelation*”
*folgt* “$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$”.

Beweis **61-2** `a)`

Aus “$\mathsf{sse} = \mathsf{sse}$”
folgt via **61-1(Def)**: $\mathsf{sse}$ universelle InklusionsRelation.

`b)` `VS` gleich (${\mathfrak{C}}$ universelle InklusionsRelation)
$\wedge$(${\mathfrak{D}}$ universelle InklusionsRelation).

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ universelle InklusionsRelation… ”
folgt via **61-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{sse}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “…$\mathfrak{D}$ universelle InklusionsRelation”
folgt via **61-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{sse}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

**61-3.** Die universelle InklusionsRelation ist eine Relation und es wird Hinreichendes für $w \in \mathsf{sse}$ angegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a)`:

**61-3(Satz)**

a) $\mathsf{sse}$ *Relation.*

b) *Aus* “$w \in \mathsf{sse}$”
*folgt* “$\exists \Omega, \Psi : (\Omega\ \mathit{Menge}) \wedge (\Psi\ \mathit{Menge}) \wedge (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$”.

Beweis **61-3** `b)` `VS` gleich $w \in \mathsf{sse}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{sse}$"
folgt via **ElementAxiom**: $w$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{sse}$" und
aus "$\mathsf{sse} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$w \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `1.1`"$w$ Menge" und
aus `2`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $(\Omega, \Psi)$ Menge.

`4:` Aus `3`"$(\Omega, \Psi)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ Menge$)$.

`5:` Aus `2`"$\exists \Omega, \Psi \ldots$",
aus `4`"$\Omega$ Menge…",
aus `4`"$\ldots \Psi$ Menge",
aus `2`"$\ldots \Omega \subseteq \Psi \ldots$" und
aus `2`"$w = (\Omega, \Psi)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega$ Menge$) \wedge (\Psi$ Menge$) \wedge (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`a)`

| `Thema1` | $\alpha \in \mathsf{sse}$. |
|---|---|
| Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathsf{sse}$" folgt via des bereits bewiesenen `b)`: | $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$. |

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{sse}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : p = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\mathsf{sse}$ Relation.

□

**sse-Notation.** Anstelle von "$p$_sse_$q$" wird "$p$ sse $q$" geschrieben. Eine Verwechslung mit einer KlassenVariablen ist nicht möglich:

**<u>sse-Notation</u>**

Sind " $\&$ " und " $\overline{\&}$ " Klassen, so gilt

$$\boxed{\text{“ } \& \text{ sse } \overline{\&} \text{ ”}} \qquad \text{genau dann, wenn:} \qquad \text{“ } \&\_\texttt{sse}\_\overline{\&} \text{ ”}.$$

**61-4.** Unter Verwendung der `sse`-**Notation** wird ein Kriterium für $p$ sse $q$ bewiesen:

**<u>61-4(Satz)</u>**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p$ sse $q$.

`ii)` *"$p$ Menge" und "$q$ Menge" und "$p \subseteq q$".*

`iii)` *"$q$ Menge" und "$p \subseteq q$".*

---

<u>`sse`-**Notation**</u>.

Beweis **61-4** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p \,\mathsf{sse}\, q$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \,\mathsf{sse}\, q$"
folgt via **30-2**: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \,\mathsf{sse}\, q$"
folgt: $(p, q) \in \mathsf{sse}$.

`2.1:` Aus `1.2`"$(p, q) \in \mathsf{sse}$"
folgt via **ElementAxiom**: $(p, q)$ Menge.

`2.2:` Aus `1.2`"$(p, q) \in \mathsf{sse}$"
folgt via **61-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq \Psi) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$.

`3:` Aus `2.2`"$\ldots (p, q) = (\Omega, \Psi)$" und
aus `2.1`"$(p, q)$ Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Psi)$.

`4:` Aus `3`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `2.2`"$\ldots \Omega \subseteq \Psi \ldots$"
folgt: $p \subseteq \Psi$.

`5:` Aus `4`"$p \subseteq \Psi$" und
aus `3`"$\ldots q = \Psi$"
folgt: $p \subseteq q$.

`6:` Aus `1.1`"$p$ Menge$\ldots$",
aus `1.1`"$\ldots q$ Menge" und
aus `5`"$p \subseteq q$"
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq q)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq q)$.

Aus `VS`
folgt: $(q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq q)$.

Beweis **61-4** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq q)$.

`1`: Aus `VS` gleich “$\ldots p \subseteq q$” und
aus `VS` gleich “$q$ Menge…”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $p$ Menge.

`2.1`: Aus `1`“$p$ Menge” und
aus `VS` gleich “$q$ Menge…”
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, q)$ Menge.

`2.2`: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`2.3`: Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = q$.

`3.1`: Aus `VS` gleich “$\ldots p \subseteq q$” und
aus `2.2`“$\ldots \Omega = p$”
folgt: $\Omega \subseteq q$.

`3.2`: Aus `2.2`“$\ldots \Omega = p$” und
aus `2.3`“$\ldots \Psi = q$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (p, q)$.

`4.1`: Aus `3.1`“$\Omega \subseteq q$” und
aus `2.3`“$\ldots \Psi = q$”
folgt: $\Omega \subseteq \Psi$.

`4.2`: Aus `3.2`
folgt: $(p, q) = (\Omega, \Psi)$.

`5`: Aus `2.2`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `2.3`“$\exists \Psi \ldots$”,
aus `4.1`“$\Omega \subseteq \Psi$” und
aus `4.2`“$(p, q) = (\Omega, \Psi)$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq \Psi) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$.

`6`: Aus `5`“$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq \Psi) \wedge ((p, q) = (\Omega, \Psi))$” und
aus `2.1`“$(p, q)$ Menge”
folgt: $(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`7`: Aus `6`“$(p, q) \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$” und
aus “$\{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\} = \mathsf{sse}$”
folgt: $(p, q) \in \mathsf{sse}$.

`8`: Aus `7`“$(p, q) \in \mathsf{sse}$”
folgt: $p \;\mathsf{sse}\; q$.

$\square$

**61-5.** Durch Negation ergibt sich aus **61-4** ein Kriterium für “ $\neg(p \,\mathsf{sse}\_q)$” :

**61-5(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\neg(p \,\mathsf{sse}\, q)$.

`ii)` *“p Unmenge” oder “q Unmenge” oder “$p \not\subseteq q$”.*

`iii)` *“q Unmenge” oder “$p \not\subseteq q$”.*

---

**sse-Notation**.

Beweis **61-5**

`1:` Via **61-4** gilt: $p \,\mathsf{sse}\, q$
$\Leftrightarrow ((p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq q)) \Leftrightarrow ((q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq q))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\neg(p \,\mathsf{sse}\, q)$
$\Leftrightarrow (\neg((p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq q))) \Leftrightarrow (\neg((q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq q)))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\neg(p \,\mathsf{sse}\, q)$
$\Leftrightarrow ((\neg(p \text{ Menge})) \vee (\neg(q \text{ Menge})) \vee (\neg(p \subseteq q)))$
$\Leftrightarrow ((\neg(q \text{ Menge})) \vee (\neg(p \subseteq q)))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\neg(p \,\mathsf{sse}\, q)$
$\Leftrightarrow ((p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge}) \vee (\neg(p \subseteq q)))$
$\Leftrightarrow ((q \text{ Unmenge}) \vee (\neg(p \subseteq q)))$.

`5:` Aus `4`
folgt via **0-3**: $\neg(p \,\mathsf{sse}\, q)$
$\Leftrightarrow ((p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge}) \vee (p \not\subseteq q))$
$\Leftrightarrow ((q \text{ Unmenge}) \vee (p \not\subseteq q))$.

□

**61-6.** Ähnlich zu **61-4** wird ein Kriterium für $p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q$ bewiesen:

**61-6(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q$.

`ii)` *"$p$ Menge" und "$q$ Menge" und "$p \subset q$".*

`iii)` *"$q$ Menge" und "$p \subset q$".*

Beweis **61-6**

---

**sse-Notation**.

---

$\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p_{-}\overset{\textbf{ir}}{\mathsf{sse}}{}_{-}q$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p_{-}\overset{\textbf{ir}}{\mathsf{sse}}{}_{-}q$”
folgt via **41-3**: $(p \;\mathsf{sse}\; q) \wedge (p \neq q)$.

`2:` Aus `1`“$p \;\mathsf{sse}_{-}q \ldots$”
folgt via **61-4**: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq q)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots p \subseteq q$” und
aus `1`“$\ldots p \neq q$”
folgt via **57-1(Def)**: $p \subset q$.

`4:` Aus `2`“$p$ Menge. . . ”,
aus `2`“$\ldots q$ Menge. . . ” und
aus `3`“$p \subset q$”
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)$.

Aus `VS`
folgt: $(q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots p \subset q$”
folgt via **57-1(Def)**: $(p \subseteq q) \wedge (p \neq q)$.

`2:` Aus `VS` gleich “$q$ Menge. . . ” und
aus `1`“$p \subseteq q \ldots$”
folgt via **61-4**: $p \;\mathsf{sse}\; q$.

`3:` Aus `2`“$p \;\mathsf{sse}\; q$” und
aus `1`“$\ldots p \neq q$”
folgt via **41-3**: $p_{-}\overset{\textbf{ir}}{\mathsf{sse}}{}_{-}q$.

□

**61-7.** Durch Negation ergibt sich aus **61-6** ein Kriterium für “$\neg(p\ _\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\ _q)$” :

**61-7(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\neg(p\ _\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\ _q)$.

`ii)` *“p Unmenge” oder “q Unmenge” oder “$p \not\subset q$”.*

`iii)` *“q Unmenge” oder “$p \not\subset q$”.*

Beweis **61-7**

`1:` Via **61-6** gilt:
$$p\ _\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\ _q \Leftrightarrow ((p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)) \Leftrightarrow ((q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)).$$

`2:` Aus `1` folgt:
$$\neg(p\ _\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\ _q) \Leftrightarrow (\neg((p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q))) \Leftrightarrow (\neg((q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q))).$$

`3:` Aus `2` folgt:
$$\neg(p\ _\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\ _q) \Leftrightarrow ((\neg(p \text{ Menge})) \vee (\neg(q \text{ Menge})) \vee (\neg(p \subset q))) \Leftrightarrow ((\neg(q \text{ Menge})) \vee (\neg(p \subset q))).$$

`4:` Aus `3` folgt:
$$\neg(p\ _\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\ _q) \Leftrightarrow ((p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge}) \vee (\neg(p \subset q))) \Leftrightarrow ((q \text{ Unmenge}) \vee (\neg(p \subset q))).$$

`5:` Aus `4` folgt via **57-6**:
$$\neg(p\ _\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\ _q) \Leftrightarrow ((p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge}) \vee (p \not\subset q)) \Leftrightarrow ((q \text{ Unmenge}) \vee (p \not\subset q)).$$

□

**61-8.** Die Relation sse ist antiSymmetrische Halbordnung in $\mathcal{U}$. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - e) - f) - g) - h) - c) - i) - d) - j) - a)`:

**61-8(Satz)**

a) sse *antiSymmetrische Halbordnung in* $\mathcal{U}$.

b) sse *reflexiv.*

c) sse *transitiv.*

d) sse *antiSymmetrisch.*

e) $\mathrm{dom}\,(\mathsf{sse}) = \mathcal{U}$.

f) $\mathrm{ran}\,(\mathsf{sse}) = \mathcal{U}$.

g) sse *Unmenge.*

h) *“$p$ Menge” genau dann, wenn “$p$ sse $p$”.*

i) *Aus “$p$ sse $q$” und “$q$ sse $w$” folgt “$p$ sse $w$”.*

j) *Aus “$p$ sse $q$” und “$q$ sse $p$” folgt “$p = q$”.*

---

sse-**Notation**.

Beweis **61-8** `befg)`

| | |
|---|---|
| $\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ | $\alpha \in \mathcal{U}$. |
| `2.1:` Via **0-6** gilt: | $\alpha \subseteq \alpha$. |
| `2.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathcal{U}$" folgt via **ElementAxiom**: | $\alpha$ Menge. |
| `3:` Aus `2.2`"$\alpha$ Menge" und aus `2.1`"$\alpha \subseteq \alpha$" folgt via **61-4**: | $\alpha$ sse $\alpha$. |

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \text{ sse } \alpha)$.

Konsequenz via **30-17(Def)**: sse reflexiv in $\mathcal{U}$.

Konsequenz via **30-17(Def)**: `A1` | "sse reflexiv"

`2.b):` Aus `A1`
folgt: sse reflexiv.

`3.e):` Aus `2.b)`"sse reflexiv"
folgt via **30-21**: $\text{dom}(\text{sse}) = \mathcal{U}$.

`3.f):` Aus `2.b)`"sse reflexiv"
folgt via **30-21**: $\text{ran}(\text{sse}) = \mathcal{U}$.

`3.g):` Aus `2.b)`"sse reflexiv"
folgt via **30-21**: sse Unmenge.

`h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p$ Menge.

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: sse reflexiv.

`2:` Aus `1`"sse reflexiv" und
aus `VS` gleich "$p$ Menge"
folgt via **30-21**: $p$ sse $p$.

`h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $p$ sse $p$.

Aus `VS` gleich "$p$ sse $p$"
folgt via **30-2**: $p$ Menge.

Beweis **61-8** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}) \wedge (\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha \;\mathsf{sse}\; \beta) \wedge (\beta \;\mathsf{sse}\; \gamma)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\ldots \alpha \;\mathsf{sse}\; \beta \ldots$”
folgt via **61-4**: $\alpha \subseteq \beta$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\ldots \beta \;\mathsf{sse}\; \gamma$”
folgt via **61-4**: $(\gamma$ Menge$) \wedge (\beta \subseteq \gamma)$.

`3:` Aus `2.1`“$\alpha \subseteq \beta$” und
aus `2.2`“$\ldots \beta \subseteq \gamma$”
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq \gamma$.

`4:` Aus `2.2`“$\gamma$ Menge$\ldots$” und
aus `3`“$\alpha \subseteq \gamma$”
folgt via **61-4**: $\alpha \;\mathsf{sse}\; \gamma$.

Ergo `Thema1.1`:
$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}) \wedge (\gamma \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha \;\mathsf{sse}\; \beta \;\mathsf{sse}\; \gamma)) \Rightarrow (\alpha \;\mathsf{sse}\; \gamma).$$

Konsequenz via **30-30(Def)**: `A1` | “$\mathsf{sse}$ transitiv in $\mathcal{U}$”

`1.2:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{sse}$ transitiv in $\mathcal{U}$”
folgt via **30-30(Def)**: $\mathsf{sse}$ transitiv.

`i)` `VS` gleich $(p \;\mathsf{sse}\; q) \wedge (q \;\mathsf{sse}\; w)$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{sse}$ transitiv.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{sse}$ transitiv”,
aus `VS` gleich “$p \;\mathsf{sse}\; q \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots q \;\mathsf{sse}\; w$”
folgt via **30-38**: $p \;\mathsf{sse}\; w$.

<u>Beweis **61-8**</u> `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha \,\mathsf{sse}\, \beta) \wedge (\beta \,\mathsf{sse}\, \alpha)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\ldots \alpha \,\mathsf{sse}\, \beta\ \ldots$"
folgt via **61-4**: $\alpha \subseteq \beta$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots \beta \,\mathsf{sse}\, \alpha$"
folgt via **61-4**: $\beta \subseteq \alpha$.

`3:` Aus `2.1`"$\alpha \subseteq \beta$" und
aus `2.2`"$\beta \subseteq \alpha$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\alpha = \beta$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in \mathcal{U}) \wedge (\beta \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha \,\mathsf{sse}\, \beta) \wedge (\beta \,\mathsf{sse}\, \alpha)) \Rightarrow (\alpha = \beta)$.

Konsequenz via **30-45(Def)**: `A1` | "$\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-45(Def)**: $\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch.

`j)` `VS` gleich $(p \,\mathsf{sse}\, q) \wedge (q \,\mathsf{sse}\, p)$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch",
aus `VS` gleich "$p \,\mathsf{sse}\, q \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \,\mathsf{sse}\, p$"
folgt via **30-47**: $p = q$.

<u>Beweis **61-8** `a)`</u>

`1.1:` Via **61-3** gilt: sse Relation.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: sse reflexiv.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: sse transitiv.

`1.4:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: sse antiSymmetrisch.

`2.1:` Aus `1.1`"sse Relation"
folgt via **10-4**: sse Relation in $\mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2`"sse reflexiv"
folgt via **30-17(Def)**: sse reflexiv in $\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1`"sse Relation in $\mathcal{U}$",
aus `2.2`"sse reflexiv in $\mathcal{U}$",
aus `1.3`"sse transitiv" und
aus `1.4`"sse antiSymmetrisch"
folgt via **34-13**: sse antiSymmetrische Halbordnung in $\mathcal{U}$.

□

**61-9.** Es folgt ein Kriterium dafür, dass $u$ eine untere sse_Schranke von $x$ ist:

**61-9(Satz)**

*Die Aussagen* i), ii), iii) *sind äquivalent:*

i) *$u$ untere* sse_*Schranke von $x$.*

ii) *"$u$ Menge" und "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u \subseteq \alpha)$".*

iii) *"$u$ Menge" und "$u \subseteq \bigcap x$".*

Beweis **61-9**

---

sse-**Notation**.

---

$\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ VS gleich $u$ untere sse_Schranke von $x$.

1.1: Aus →) "$u$ untere sse_Schranke von $x$"
folgt via **35-4**: A1 | "$u$ Menge"

Thema1.2 $\alpha \in x$.

2: Aus VS gleich "$u$ untere sse_Schranke von $x$" und
aus Thema1.2 "$\alpha \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: $u$ sse $\alpha$.

3: Aus 2 "$u$ sse $\alpha$"
folgt via **61-4**: $u \subseteq \alpha$.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u \subseteq \alpha)$"

1.3: Aus A1 gleich "$u$ Menge" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u \subseteq \alpha)$"
folgt: $(u \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u \subseteq \alpha))$.

Beweis **61-9** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(u \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u \subseteq \alpha))$.

1: Aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u \subseteq \alpha)$"
folgt via **1-15**: $u \subseteq \bigcap x$.

2: Aus VS gleich "$u$ Menge…" und
aus 1"$u \subseteq \bigcap x$"
folgt: $(u \text{ Menge}) \wedge (u \subseteq \bigcap x)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(u \text{ Menge}) \wedge (u \subseteq \bigcap x)$.

1.1: Aus VS gleich "$u$ Menge…"
folgt via **0-19**: $u \in \mathcal{U}$.

2: Via **61-8** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse}) = \mathcal{U}$.

3: Aus 1.1"$u \in \mathcal{U}$" und
aus 2"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse}) = \mathcal{U}$"
folgt: A1 | "$u \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})$"

Thema1.2 $\beta \in x$.

2.1: Aus Thema1.2"$\beta \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: $\beta$ Menge.

2.2: Aus Thema1.2"$\beta \in x$"
folgt via **1-15**: $\bigcap x \subseteq \beta$.

3: Aus VS gleich "$\ldots u \subseteq \bigcap x$" und
aus 2.2"$\bigcap x \subseteq \beta$"
folgt via **0-6**: $u \subseteq \beta$.

4: Aus 2.1"$\beta$ Menge" und
aus 3"$u \subseteq \beta$"
folgt via **61-4**: $u \;\mathsf{sse}\; \beta$.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (u \;\mathsf{sse}\; \beta)$"

1.3: Aus A1 gleich "$u \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})$" und
aus A2 gleich "$\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (u \;\mathsf{sse}\; \beta)$"
folgt via **35-1(Def)**: $u$ untere sse_Schranke von $x$.

□

**61-10.** Es folgt ein Kriterium dafür, dass $o$ eine obere sse_Schranke von $x$ ist:

**61-10(Satz)**

*Die Aussagen* i), ii), iii) *sind äquivalent:*

i) *$o$ obere sse_Schranke von $x$.*

ii) *"$o$ Menge" und "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (x \subseteq o)$".*

iii) *"$o$ Menge" und "$\bigcup x \subseteq o$".*

Beweis **61-10**

---

**sse-Notation**.

---

$\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ VS gleich $o$ obere sse_Schranke von $x$.

1.1: Aus →) "$o$ obere sse_Schranke von $x$"
folgt via **35-5**: A1 | "$o$ Menge"

Thema1.2 $\alpha \in x$.

2: Aus VS gleich "$o$ obere sse_Schranke von $x$" und
aus Thema1.2 "$\alpha \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: $\alpha$ sse $o$.

3: Aus 2 "$\alpha$ sse $o$"
folgt via **61-4**: $\alpha \subseteq o$.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq o)$"

1.3: Aus A1 gleich "$o$ Menge" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq o)$"
folgt: $(o \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq o))$.

Beweis **61-10** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(o \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq o))$.

1: Aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq o)$"
folgt via **1-15**: $\bigcup x \subseteq o$.

2: Aus VS gleich "$o$ Menge…" und
aus 1"$\bigcup x \subseteq o$"
folgt: $(o \text{ Menge}) \wedge (\bigcup x \subseteq o)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(o \text{ Menge}) \wedge (\bigcup x \subseteq o)$.

1.1: Aus VS gleich "$o$ Menge…"
folgt via **0-19**: $o \in \mathcal{U}$.

2: Via **61-8** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse}) = \mathcal{U}$.

3: Aus 1.1"$o \in \mathcal{U}$" und
aus 2"$\mathsf{ran}\,(\mathsf{sse}) = \mathcal{U}$"
folgt: A1 | "$o \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})$"

> Thema1.2 $\beta \in x$.
>
> 2: Aus Thema1.2"$\beta \in x$"
> folgt via **1-15**: $\beta \subseteq \bigcup x$.
>
> 3: Aus 2"$\beta \subseteq \bigcup x$" und
> aus VS gleich "$\ldots \bigcup x \subseteq o$"
> folgt via **0-6**: $\beta \subseteq o$.
>
> 4: Aus VS gleich "$o$ Menge …" und
> aus 3"$\beta \subseteq o$"
> folgt via **61-4**: $\beta \;\mathsf{sse}\; o$.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\beta \;\mathsf{sse}\; o)$"

1.3: Aus A1 gleich "$o \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})$" und
aus A2 gleich "$\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\beta \;\mathsf{sse}\; o)$"
folgt via **35-1(Def)**: $o$ obere $\mathsf{sse}$_Schranke von $x$.

□

**61-11.** Aus **61-9** und **61-10** folgt ohne grosse Mühe der folgende Satz, bei dem ein Symmetriebruch zwischen unteren und oberen sse_Schranken festzustellen ist:

**61-11(Satz)**

a) *Aus "$u$ untere* sse*_Schranke von $x$" folgt "$u \subseteq \bigcap x$".*

b) *Aus "$o$ obere* sse*_Schranke von $x$" folgt "$\bigcup x$* sse *$o$".*

---

sse-**Notation**.

Beweis **61-11** a) VS gleich $u$ untere sse_Schranke von $x$.

Aus VS gleich "$u$ untere sse_Schranke von $x$"
folgt via **61-9**: $u \subseteq \bigcap x$.

b) VS gleich $o$ obere sse_Schranke von $x$.

1: Aus VS gleich "$o$ obere sse_Schranke von $x$"
folgt via **61-10**: $(o$ Menge$) \wedge (\bigcup x \subseteq o)$.

2: Aus 1"$\ldots \bigcup x \subseteq o$" und
aus 1"$o$ Menge$\ldots$"
folgt via **61-4**: $\bigcup x$ sse $o$.

□

**61-12.** Mit $\bigcap x$ ist ausser im Fall $x = 0$ eine prominente untere sse_Schranke von $x$, die noch dazu ein sse_Infimum von $x$ ist, verfügbar:

**61-12(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $\bigcap x$ *untere* sse_*Schranke von* $x$.

`ii)` $\bigcap x$ *ist* sse_*Infimum von* $x$.

`iii)` $\bigcap x$ *Menge.*

`iv)` $0 \neq x$.

Beweis **61-12**

---

sse-**Notation**.

---

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\bigcap x$ untere sse_Schranke von $x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\bigcap x$ untere sse_Schranke von $x$"
folgt via **35-4**: $\bigcap x$ Menge.

`Thema2.1` $\alpha$ untere sse_Schranke von $x$.

`2:` Aus `Thema2.1`"$\alpha$ untere sse_Schranke von $x$"
folgt via **61-9**: $\alpha \subseteq \bigcap x$.

`3:` Aus `1`"$\bigcap x$ Menge" und
aus `2`"$\alpha \subseteq \bigcap x$"
folgt via **61-4**: $\alpha$ sse $\bigcap x$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha$ untere sse_Schranke von $x) \Rightarrow (\alpha$ sse $\bigcap x)$"

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\bigcap x$ untere sse_Schranke von $x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ untere sse_Schranke von $x) \Rightarrow (\alpha$ sse $\bigcap x)$"
folgt via **36-1(Def)**: $\bigcap x$ ist sse_Infimum von $x$.

Beweis **61-12** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $\bigcap x$ ist sse_Infimum von $x$.

Aus VS gleich "$\bigcap$ ist sse_Infimum von $x$"
folgt via **36-3**: $\bigcap x$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $\bigcap x$ Menge.

Aus VS gleich "$\bigcap x$ Menge"
folgt via **1-17**: $0 \neq x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $0 \neq x$.

1.1: Aus VS gleich "$0 \neq x$"
folgt via **1-17**: A1 | "$\bigcap x$ Menge"

Thema1.2 $\alpha \in x$.

Aus Thema1.2"$\alpha \in x$"
folgt via **1-15**: $\bigcap x \subseteq \alpha$.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\bigcap x \subseteq \alpha)$"

1.3: Aus A1 gleich "$\bigcap x$ Menge" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\bigcap x \subseteq \alpha)$"
folgt via **61-9**: $\bigcap x$ untere sse_Schranke von $x$.

$\square$

**61-13.** Der in **61-9** nicht behandelte Fall $x = 0$ wird - zumindest teilweise - im Rahmen des folgenden, allgemeineren Resultats mitbehandelt:

**61-13(Satz)**

a) 0 *untere* `sse`*_Schranke von* $x$.

b) $\exists\Omega : \Omega$ *untere* `sse`*_Schranke von* $x$.

Beweis **61-11** `a)`

`1.1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: | `A1` | "0 Menge"

`Thema1.2` $\alpha \in x$.

Via **0-18** gilt: $0 \subseteq x$.

Ergo `Thema1.2`: | `A2` | "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (0 \subseteq \alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "0 Menge" und
aus `A2` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (0 \subseteq \alpha)$"
folgt via **61-9**: 0 untere `sse`_Schranke von $x$.

`b)`

`1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = 0$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: 0 untere `sse`_Schranke von $x$.

`3:` Aus `1`"$\ldots\Omega = 0$" und
aus `2`"0 untere `sse`_Schranke von $x$"
folgt: $\Omega$ untere `sse`_Schranke von $x$.

`4:` Aus `1`"$\exists\Omega\ldots$" und
aus `3`"$\Omega$ untere `sse`_Schranke von $x$"
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ untere `sse`_Schranke von $x$.

$\square$

**61-14.** Die Klasse $\bigcup x$ ist genau dann eine obere sse_Schranke von $x$, wenn $\bigcup x$ ein sse_Supremum von $x$ ist und dies ist, ähnlich wie in **61-12**, genau dann der Fall, wenn $\bigcup x$ eine Menge ist und dies ist genau dann der Fall, wenn es überhaupt eine obere sse_Schranke von $x$ ist und dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn es *Menge* gibt, so dass jedes Element von $x$ TeilKlasse dieser Menge ist:

**61-14(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $\bigcup x$ *obere* sse_*Schranke von* $x$.

`ii)` $\bigcup x$ *ist* sse_*Supremum von* $x$.

`iii)` $\bigcup x$ *Menge.*

`iv)` $\exists\Omega : \Omega$ *obere* sse_*Schranke von* $x$.

`v)` $\exists\Omega : (\Omega \textit{ Menge}) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq \Omega))$.

Beweis **61-14**

---

**sse-Notation**.

---

`i) ⇒ ii)` `VS` gleich $\bigcup x$ obere sse_Schranke von $x$.

`Thema1.1` $\alpha$ obere sse_Schranke von $x$

Aus `Thema1.1`"$\alpha$ obere sse_Schranke von $x$"
folgt via **61-10**: $\bigcup x$ sse $\alpha$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall\alpha : (\alpha$ obere sse_Schranke von $x) \Rightarrow (\bigcup x$ sse $\alpha)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\bigcup x$ obere sse_Schranke von $x$" und
aus `A1` gleich "$\forall\alpha : (\alpha$ obere sse_Schranke von $x) \Rightarrow (\bigcup x$ sse $\alpha)$"
folgt via **36-1(Def)**: $\bigcup x$ ist sse_Supremum von $x$.

Beweis **61-14** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\bigcup x$ ist sse_Supremum von $x$.

Aus `VS` gleich "$\bigcup x$ ist sse_Supremum von $x$"
folgt via **36-4**: $\bigcup x$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $\bigcup x$ Menge.

> `Thema1.1` $\alpha \in x$.
>
> Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x$"
> folgt via **1-15**: $\alpha \subseteq \bigcup x$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq \bigcup x)$"

`1.2`: Aus `VS` gleich "$\bigcup x$ Menge" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq \bigcup x)$"
folgt via **61-10**: $\bigcup x$ obere sse_Schranke von $x$.

`2`: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \bigcup x$.

`3`: Aus `2`"$\ldots \Omega = \bigcup x$" und
aus `1.2`"$\bigcup x$ obere sse_Schranke von $x$"
folgt: $\Omega$ obere sse_Schranke von $x$.

`4`: Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`"$\Omega$ obere sse_Schranke von $x$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ obere sse_Schranke von $x$.

<u>Beweis **61-14**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $\exists\Omega : \Omega$ obere sse_Schranke von $x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "…$\Omega$ obere sse_Schranke von $x$"
folgt via **35-5**: `A1` | "$\Omega$ Menge"

> `Thema1.2` $\alpha \in x$.
>
> `2:` Aus `VS` gleich "…$\Omega$ obere sse_Schranke von $x$" und
> aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$"
> folgt via **35-1(Def)**: $\alpha$ sse $\Omega$.
>
> `3:` Aus 2"$\alpha$ sse $\Omega$"
> folgt via **61-4**: $\alpha \subseteq \Omega$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq \Omega)$"

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\exists\Omega$…",
aus `A1` gleich "$\Omega$ Menge" und
aus `A2` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq \Omega)$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq \Omega))$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\exists\Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq \Omega))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "…$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq \Omega)$"
folgt via **1-15**: $\bigcup x \subseteq \Omega$.

`2:` Aus `VS` gleich "…$\Omega$ Menge…" und
aus `1.1`"$\bigcup x \subseteq \Omega$"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\bigcup x$ Menge.

> `Thema3.1` $\beta \in x$.
>
> Aus `Thema3.1`"$\beta \in x$"
> folgt via **1-15**: $\beta \subseteq \bigcup x$.

Ergo `Thema3.1`: `A1` | "$\forall\beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\beta \subseteq \bigcup x)$"

`3.2:` Aus 2"$\bigcup x$ Menge" und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\beta \subseteq \bigcup x)$"
folgt via **61-10**: $\bigcup x$ obere sse_Schranke von $x$.

□

**61-15.** Via Negation folgt aus **61-14** ein Kriterium für oben $\mathsf{sse}$_unbeschränkte Klassen:

**61-15(Satz)**

*Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x$ *oben* $\mathsf{sse}$_*unbeschränkt.*

`ii)` $\bigcup x$ *Unmenge.*

Beweis **61-15**

`1:` Via **61-14** gilt: $(\bigcup x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\exists \Omega : \Omega \text{ obere } \mathsf{sse}\text{\_Schranke von } x)$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(\bigcup x \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ obere } \mathsf{sse}\text{\_Schranke von } x))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(\bigcup x \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ obere } \mathsf{sse}\text{\_Schranke von } x))$.

`4:` Via **35-1(Def)** gilt: $x \text{ oben } \mathsf{sse}\text{\_unbeschränkt} \Leftrightarrow (\neg(\exists \Omega : \Omega \text{ obere } \mathsf{sse}\text{\_Schranke von } x))$.

`5:` Aus `3` und aus `4` folgt: $(\bigcup x \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (x \text{ oben } \mathsf{sse}\text{\_unbeschränkt})$.

`5:` Aus `5` folgt: $(x \text{ oben } \mathsf{sse}\text{\_unbeschränkt}) \Leftrightarrow (\bigcup x \text{ Unmenge})$.

□

**61-16.** Jede *Menge* ist obere sse_Schranke von 0. Im Speziellen ist 0 eine obere sse_Schranke von 0. $\mathcal{U}$ ist oben sse_unbeschränkt:

**61-16(Satz)**

a) *Aus "p Menge" folgt "p obere* sse_*Schranke von* 0*".*

b) 0 *obere* sse_*Schranke von* 0*.*

c) $\mathcal{U}$ *oben* sse_*unbeschränkt.*

Beweis **61-16** `a)` `VS` gleich $p$ Menge.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in 0$.

`2:` Via **0-19** gilt: $\alpha \notin 0$.

`3:` Es gilt `Thema1.1`“$\alpha \in 0$”.
Es gilt `2`“$\alpha \notin 0$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \subseteq p$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in 0) \Rightarrow (\alpha \subseteq p)$”

`1.2:` Aus `VS` gleich “$p$ Menge” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in 0) \Rightarrow (\alpha \subseteq p)$”
folgt via **61-10**: $p$ obere sse_Schranke von 0.

`b)`

`1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`2:` Aus `1`“0 Menge”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: 0 obere sse_Schranke von 0.

`c)`

`1:` Via **1-14** gilt: $\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`2:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`3:` Aus `1`“$\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$” und
aus `2`“$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt: $\bigcup \mathcal{U}$ Unmenge.

`4:` Aus `3`“$\bigcup \mathcal{U}$ Unmenge”
folgt via **61-15**: $\mathcal{U}$ oben sse_unbeschränkt.

□

**61-17.** Jede Klasse hat höchstens ein sse_Infimum/sse_Supremum:

<u>**61-17(Satz)**</u>

a) *Aus "$inf$ ist sse_Infimum von $x$"*
*und "$i$ ist sse_Infimum von $x$"*
*folgt "$inf = i$".*

b) *Aus "$sup$ ist sse_Supremum von $x$"*
*und "$s$ ist sse_Supremum von $x$"*
*folgt "$sup = s$".*

<u>Beweis **61-17**</u> a)
VS gleich ($inf$ ist sse_Infimum von $x$) $\wedge$ ($i$ ist sse_Infimum von $x$).

1: Via **61-8** gilt: sse antiSymmetrisch.

2: Aus 1"sse antiSymmetrisch",
aus VS gleich "$inf$ ist sse_Infimum von $x$ ..." und
aus VS gleich "... $i$ ist sse_Infimum von $x$"
folgt via **46-2**: $inf = i$.

b)
VS gleich ($sup$ ist sse_Supremum von $x$) $\wedge$ ($s$ ist sse_Supremum von $x$).

1: Via **61-8** gilt: sse antiSymmetrisch.

2: Aus 1"sse antiSymmetrisch",
aus VS gleich "$sup$ ist sse_Supremum von $x$ ..." und
aus VS gleich "... $s$ ist sse_Supremum von $x$"
folgt via **46-3**: $sup = s$.

□

**61-18.** Im folgenden Satz werden sse_Infima und sse_Suprema von 0 und $\mathcal{U}$ diskutiert. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - c) - d) - e) - f) - a)`:

**61-18(Satz)**

a) 0 *hat kein* sse_*Infimum.*

b) 0 *ist* sse_*Supremum von* 0.

c) *Aus "sup ist* sse_*Supremum von* 0" *folgt "*$sup = 0$".

d) 0 *ist* sse_*Infimum von* $\mathcal{U}$.

e) *Aus "inf ist* sse_*Infimum von* $\mathcal{U}$" *folgt "*$inf = 0$".

f) $\mathcal{U}$ *hat kein* sse_*Supremum.*

Beweis **61-18** `b)`

`1.1:` Via **61-16** gilt: | `A1` | "0 obere sse_Schranke von 0"

`Thema1.2` $o$ obere sse_Schranke von 0.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$o$ obere sse_Schranke von 0"
folgt via **35-5**: $o$ Menge.

`2.2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq o$.

`3:` Aus `2.1`"$o$ Menge" und
aus `2.2`"$0 \subseteq o$"
folgt via **61-4**: 0 sse $o$.

Ergo `Thema1.2`: | `A2` | "$\forall o : (o$ obere sse_Schranke von $0) \Rightarrow (0$ sse $o)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "0 obere sse_Schranke von 0" und
aus `A2` gleich "$\forall o : (o$ obere sse_Schranke von $0) \Rightarrow (0$ sse $o)$"
folgt via **36-1(Def)**: 0 ist sse_Supremum von 0.

Beweis **61-18** c) VS gleich $sup$ ist sse_Supremum von 0.

1: Via des bereits bewiesenen b) gilt: 0 ist sse_Supremum von 0.

2: Aus VS gleich "$sup$ ist sse_Supremum von 0" und
aus 1 "0 ist sse_Supremum von 0"
folgt via **61-17**: $sup = 0$.

d)

1: Via **61-8** gilt: sse ist antiSymmetrische Halbordnung in $\mathcal{U}$.

2.1: Aus 1 "sse antiSymmetrische Halbordnung in $\mathcal{U}$"
folgt via **34-13**: (sse Relation in $\mathcal{U}$) $\wedge$ (sse reflexiv in $\mathcal{U}$).

2.2: Via des bereits bewiesenen b) gilt: 0 ist sse_Supremum von 0.

3: Aus 2.1 "sse ist Relation in $\mathcal{U}$ ...",
aus 2.1 "... sse ist reflexiv in $\mathcal{U}$" und
aus 2.2 "0 ist sse_Supremum von 0"
folgt via **43-8**: 0 ist sse_Infimum von $\mathcal{U}$.

e) VS gleich $inf$ ist sse_Infimum von $\mathcal{U}$.

1: Via des bereits bewiesenen d) gilt: 0 ist sse_Infimum von $\mathcal{U}$.

2: Aus VS gleich "$inf$ ist sse_Infimum von $\mathcal{U}$" und
aus 1 "0 ist sse_Infimum von $\mathcal{U}$"
folgt via **61-17**: $inf = 0$.

f)

1: Via **61-16** gilt: $\mathcal{U}$ oben sse_unbeschränkt.

2: Aus 1 "$\mathcal{U}$ oben sse_unbeschränkt"
folgt via **36-23**: $\mathcal{U}$ hat kein sse_Supremum.

a)

1: Via **61-8** gilt: sse ist antiSymmetrische Halbordnung in $\mathcal{U}$.

2.1: Aus 1 "sse antiSymmetrische Halbordnung in $\mathcal{U}$"
folgt via **34-13**: (sse Relation in $\mathcal{U}$) $\wedge$ (sse reflexiv in $\mathcal{U}$).

2.2: Via des bereits bewiesenen f) gilt: $\mathcal{U}$ hat kein sse_Supremum.

3: Aus 2.1 "sse ist Relation in $\mathcal{U}$ ...",
aus 2.1 "... sse ist reflexiv in $\mathcal{U}$" und
aus 2.2 "$\mathcal{U}$ hat kein sse_Supremum"
folgt via **43-9**: 0 hat kein sse_Infimum.

□

**61-19.** Das einzige `sse_Minimum` von $\mathcal{U}$ ist 0 und $\mathcal{U}$ hat kein `sse_Maximum`:

**61-19(Satz)**

a) *0 ist* `sse_`*Minimum von* $\mathcal{U}$*.*

b) *Aus "min ist* `sse_`*Minimum von* $\mathcal{U}$*" folgt "*$min = 0$*".*

c) $\mathcal{U}$ *hat kein* `sse_`*Maximum.*

Beweis **61-19** `a)`

`1.1:` Via **61-13** gilt: 0 untere `sse_Schranke` von $\mathcal{U}$.

`1.2:` Via **0-18** gilt: $0 \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1`"0 untere `sse_Schranke` von $\mathcal{U}$" und
aus `1.2`"$0 \in \mathcal{U}$"
folgt via **38-1(Def)**: 0 ist `sse_Minimum` von $\mathcal{U}$.

`b)` `VS` gleich $min$ ist `sse_Minimum` von $\mathcal{U}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: 0 ist `sse_Minimum` von $\mathcal{U}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$min$ ist `sse_Minimum` von $\mathcal{U}$"
folgt via **38-6**: $min$ ist `sse_Infimum` von $\mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1`"0 ist `sse_Minimum` von $\mathcal{U}$"
folgt via **38-6**: 0 ist `sse_Infimum` von $\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1`"$min$ ist `sse_Infimum` von $\mathcal{U}$" und
aus `2.2`"0 ist `sse_Infimum` von $\mathcal{U}$"
folgt via **61-17**: $min = 0$.

`c)`

`1:` Via **61-18** gilt: $\mathcal{U}$ hat kein `sse_Supremum`.

`2:` Aus `1`"$\mathcal{U}$ hat kein `sse_Supremum`"
folgt via **38-18**: $\mathcal{U}$ hat kein `sse_Maximum`.

□

**61-20.** In bemerkenswerter Symmetrie folgt aus "$inf$ ist sse_Infimum von $x$" bzw. "$sup$ ist sse_Supremum von $x$", dass $\bigcap x$ bzw. $\bigcup x$ eine Menge ist und dass $inf = \bigcap x$ bzw. $sup = \bigcup x$ gilt:

**61-20(Satz)**

a) *Aus "$inf$ ist* sse_*Infimum von $x$" folgt "$\bigcap x$ Menge" und "$inf = \bigcap x$".*

b) *Aus "$sup$ ist* sse_*Supremum von $x$" folgt "$\bigcup x$ Menge" und "$sup = \bigcup x$".*

<u>Beweis **61-20**</u> `a)` `VS` gleich $\qquad$ $inf$ ist sse_Infimum von $x$.

`1.1:` Es gilt: $\qquad$ $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $\qquad$ $x = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$inf$ ist sse_Infimum von $x$" und
aus `1.1.1.Fall`"$x = 0$"
folgt: $\qquad$ $inf$ ist sse_Infimum von 0.

`3:` Via **61-18** gilt: $\qquad$ 0 hat kein sse_Infimum.

`4:` Aus `3`"0 hat kein sse_Infimum"
folgt via **36-22**: $\qquad$ $inf$ kein sse_Infimum von 0.

`5:` Aus `4`"$inf$ kein sse_Infimum von 0"
folgt via **36-1(Def)**: $\qquad$ $\neg$($inf$ ist sse_Infimum von 0).

`6:` Es gilt `5`"$\neg$($inf$ ist sse_Infimum von 0)".
Es gilt `2`"$inf$ ist sse_Infimum von 0".
Ex falso quodlibet folgt: $\qquad$ $0 \neq x$.

`1.1.2.Fall` $\qquad$ $0 \neq x$.

In beiden Fällen gilt: $\qquad$ `A1` | "$0 \neq x$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$0 \neq x$"
folgt via **61-12**: $\qquad$ ($\bigcap x$ Menge) $\wedge$ ($\bigcap x$ ist sse_Infimum von $x$).

`3:` Aus `VS` gleich "$inf$ ist sse_Infimum von $x$" und
aus `1.2`"...$\bigcap x$ ist sse_Infimum von $x$"
folgt via **61-17**: $\qquad$ $inf = \bigcap x$.

`4:` Aus `1.2`"$\bigcap x$ Menge..." und
aus `3`"$inf = \bigcap x$"
folgt: $\qquad$ ($\bigcap x$ Menge) $\wedge$ ($inf = \bigcap x$).

Beweis **61-20** `b)` `VS` gleich $sup$ ist sse_Supremum von $x$.

`1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = sup$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega = sup$" und
aus `VS` gleich "$sup$ ist sse_Supremum von $x$"
folgt: $\Omega$ ist sse_Supremum von $x$.

`3:` Aus `2`"$\Omega$ ist sse_Supremum von $x$"
folgt via **36-1(Def)**: $\Omega$ obere sse_Schranke von $x$.

`4:` Aus `1`"$\exists\Omega \ldots$" und
aus `3`"$\Omega$ obere sse_Schranke von $x$"
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ obere sse_Schranke von $x$.

`5:` Aus `4`"$\exists\Omega : \Omega$ obere sse_Schranke von $x$"
folgt via **61-14**: $(\bigcup x$ Menge$) \wedge (\bigcup x$ ist sse_Supremum von $x)$.

`6:` Aus `VS` gleich "$sup$ ist sse_Supremum von $x$" und
aus `5`"$\ldots \bigcup x$ ist sse_Supremum von $x$"
folgt via **61-17**: $sup = \bigcup x$.

`7:` Aus `5`"$\bigcup x$ Menge$\ldots$" und
aus `6`"$sup = \bigcup x$"
folgt: $(\bigcup x$ Menge$) \wedge (sup = \bigcup x)$.

□

**61-21.** Wenn $p \in x$ und wenn aus $\alpha \in x$ und $\alpha \subseteq p$ stets $p \subseteq \alpha$ folgt, dann ist $p$ ein sse_minimales Element von $x$:

**61-21(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) $p \in x$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \subseteq p)) \Rightarrow (p \subseteq \alpha)$.

*Dann folgt "$p$ ist* sse_*minimales Element von $x$".*

Beweis **61-21**

---

**sse-Notation**.

---

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta \in x) \wedge (\beta \,\mathsf{sse}\, p)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in x \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $\beta$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\ldots \beta \,\mathsf{sse}\, p$"
folgt via **61-4**: $\beta \subseteq p$.

`3:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in x \ldots$" und
aus `2.2`
folgt: $(\beta \in x) \wedge (\beta \subseteq p)$.

`4:` Aus `3`"$(\beta \in x) \wedge (\beta \subseteq p)$" und
aus →)"$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \subseteq p)) \Rightarrow (p \subseteq \alpha)$"
folgt: $p \subseteq \beta$.

`5:` Aus `2.1`"$\beta$ Menge" und
aus `4`"$p \subseteq \beta$"
folgt via **61-4**: $p \,\mathsf{sse}\, \beta$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \beta : ((\beta \in x) \wedge (\beta \,\mathsf{sse}\, p)) \Rightarrow (p \,\mathsf{sse}\, \beta)$"

`1.2:` Aus →)"$p \in x$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in x) \wedge (\beta \,\mathsf{sse}\, p)) \Rightarrow (p \,\mathsf{sse}\, \beta)$"
folgt via **39-1(Def)**: $p$ ist sse_minimales Element von $x$.

□

**61-22.** Wenn $p \in x$ und wenn aus $\alpha \in x$ und $p \subseteq \alpha$ stets $\alpha \subseteq p$ folgt, dann ist $p$ ein sse_maximales Element von $x$:

**61-22(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) $p \in x$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (p \subseteq \alpha)) \Rightarrow (\alpha \subseteq p)$.

*Dann folgt "$p$ ist sse_maximales Element von $x$".*

Beweis **61-22**

---

**sse-Notation**.

---

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta \in x) \wedge (p \;\mathsf{sse}\; \beta)$.

2.1: Aus Thema1.1 "$\ldots p \;\mathsf{sse}\; \beta$"
folgt via **30-2**: $p$ Menge.

2.2: Aus Thema1.1 "$\ldots p \;\mathsf{sse}\; \beta$"
folgt via **61-4**: $p \subseteq \beta$.

3: Aus Thema1.1 "$\beta \in x \ldots$" und
aus 2.2
folgt: $(\beta \in x) \wedge (p \subseteq \beta)$.

4: Aus 3 "$(\beta \in x) \wedge (p \subseteq \beta)$" und
aus →) "$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (p \subseteq \alpha)) \Rightarrow (\alpha \subseteq p)$"
folgt: $\beta \subseteq p$.

5: Aus 2.1 "$p$ Menge" und
aus 4 "$\beta \subseteq p$"
folgt via **61-4**: $\beta \;\mathsf{sse}\; p$.

Ergo Thema1.1: A1 | "$\forall \beta : ((\beta \in x) \wedge (p \;\mathsf{sse}\; \beta)) \Rightarrow (\beta \;\mathsf{sse}\; p)$"

1.2: Aus →) "$p \in x$" und
aus A1 gleich "$\forall \beta : ((\beta \in x) \wedge (p \;\mathsf{sse}\; \beta)) \Rightarrow (p \;\mathsf{sse}\; \beta)$"
folgt via **39-1(Def)**: $p$ ist sse_maximales Element von $x$.

□

**61-23.** Nicht zuletzt mit Hilfe des **GleichheitsAxiom**s ergeben sich folgende Eigenschaften sse_minimaler oder sse_maximaler Elemente:

**61-23(Satz)**

a) *Aus "$\mu in$ ist* sse_*minimales Element von $x$" und "$p \in x$" und "$p \subseteq \mu in$"*

*folgt "$p = \mu in$".*

b) *Aus "$\mu ax$ ist* sse_*maximales Element von $x$" und "$p \in x$" und "$\mu ax \subseteq p$"*

*folgt "$p = \mu ax$".*

Beweis **61-23**

---

**sse-Notation**.

---

a) VS gleich $(\mu in$ ist sse_minimales Element von $x) \wedge (p \in x) \wedge (p \subseteq \mu in)$.

1: Aus VS gleich "$\mu in$ ist sse_minimales Element von $x \ldots$"
folgt via **39-3**: $\mu in$ Menge.

2: Aus VS gleich "$\ldots p \subseteq \mu in$" und
aus 1"$\mu in$ Menge"
folgt via **61-4**: $p$ sse $\mu in$.

3: Aus VS gleich "$\mu in$ ist sse_minimales Element von $x \ldots$",
aus VS gleich "$\ldots p \in x \ldots$" und
aus 2"$p$ sse $\mu in$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu in$ sse $p$.

4: Aus 2"$p$ sse $\mu in$" und
aus 3"$\mu in$ sse $p$"
folgt via **61-8**: $p = \mu in$.

b) VS gleich $(\mu ax$ ist sse_maximales Element von $x) \wedge (p \in x) \wedge (\mu ax \subseteq p)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots p \in x \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $p$ Menge.

2: Aus VS gleich "$\ldots \mu ax \subseteq p$" und
aus 1"$p$ Menge"
folgt via **61-4**: $\mu ax$ sse $p$.

3: Aus VS gleich "$\mu ax$ ist sse_maximales Element von $x \ldots$",
aus VS gleich "$\ldots p \in x \ldots$" und
aus 2"$\mu ax$ sse $p$"
folgt via **39-1(Def)**: $p$ sse $\mu ax$.

4: Aus 3"$p$ sse $\mu ax$" und
aus 2"$\mu ax$ sse $p$"
folgt via **61-8**: $p = \mu ax$.

□

**61-24.** Die folgende, nahe liegende Aussage stellt sicher, wann *kein* sse_minimales oder sse_maximales Element von $x$ vorliegt:

**61-24(Satz)**

a) *Aus "$p \in x$" und "$p \subset q$" folgt "$q$ kein* sse_*minimales Element von $x$".*

b) *Aus "$p \in x$" und "$q \subset p$" folgt "$q$ kein* sse_*maximales Element von $x$".*

Beweis **61-24** a) VS gleich $(p \in x) \wedge (p \subset q)$.

1: Via **61-8** gilt: sse antiSymmetrisch.

2: Es gilt: $(q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

Fallunterscheidung

2.1.Fall $q$ Menge.

3: Aus 2.1.Fall "$q$ Menge" und aus VS gleich "$\ldots p \subset q$" folgt via **61-6**: $p \mathbin{\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_} q$.

4: Aus 1 "sse antiSymmetrisch", aus VS gleich "$p \in x$" und aus 3 "$p \mathbin{\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_} q$" folgt via **46-10**: $q$ kein sse_minimales Element von $x$.

2.2.Fall $q$ Unmenge.

3: Aus 2.2.Fall "$q$ Unmenge" folgt via **0-1**: $q \notin x$.

4: Aus 3 "$q \notin x$" folgt via **39-8**: $q$ kein sse_minimales Element von $x$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $q$ kein sse_minimales Element von $x$.

<u>Beweis **61-24**</u> `b)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (q \subset p)$.

`1.1:` Via **61-8** gilt: $\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $p$ Menge.

`2:` Aus `1.2`"$p$ Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \subset p$"
folgt via **61-6**: $q \mathbin{\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_} p$.

`3:` Aus `1.1`"$\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch",
aus `VS` gleich "$p \in x$" und
aus `2`"$p \mathbin{\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_} q$"
folgt via **46-10**: $q$ kein $\mathsf{sse}$_minimales Element von $x$.

$\square$

**61-25.** Falls es zu jedem Element $\alpha$ von $x$ ein $\Omega \in x$ gibt, so dass $\Omega$ eine echte TeilKlasse von $\alpha$ ist, dann hat $x$ kein sse_minimales Element. Ähnliches gewährleistet, dass $x$ kein sse_maximales Element hat:

**61-25(Satz)**

a) *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \subset \alpha))$" *folgt* "*$x$ hat kein* sse_*minimales Element*".

b) *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha \subset \Omega))$" *folgt* "*$x$ hat kein* sse_*maximales Element*".

<u>Beweis **61-25**</u> `a)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \subset \alpha))$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in x$.

`2.1:` Aus `Thema1`“$\beta \in x$”
folgt via **ElementAxiom**: $\beta$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1`“$\beta \in x$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega \subset \alpha))$”
folgt: $\exists\Psi : (\Psi \in x) \wedge (\Psi \subset \beta)$.

`3:` Aus `2.1`“$\beta$ Menge” und
aus `2.2`“$\ldots \Psi \subset \beta$”
folgt via **61-6**: $\Psi\ {}_{-}\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}{}_{-}\ \beta$.

`4.1:` Aus `3`“$\Psi\ {}_{-}\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}{}_{-}\ \beta$”
folgt via **41-3**: $\Psi\ \mathsf{sse}\ \beta$.

`4.2:` Via **61-8** gilt: $\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch.

`5:` Aus `4.2`“$\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch” und
aus `3`“$\Psi\ {}_{-}\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}{}_{-}\ \beta$”
folgt via **46-1**: $\neg(\beta\ \mathsf{sse}\ \Psi)$.

`6:` Aus `2.2`“$\exists\Psi \ldots$”,
aus `2.2`“$\ldots \Psi \in x \ldots$”,
aus `4.1`“$\Psi\ \mathsf{sse}\ \beta$” und
aus `5`“$\neg(\beta\ \mathsf{sse}\ \Psi)$”
folgt: $\exists\Psi : (\Psi \in x) \wedge (\Psi\ \mathsf{sse}\ \beta) \wedge (\neg(\beta\ \mathsf{sse}\ \Psi))$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\exists\Psi : (\Psi \in x) \wedge (\Psi\ \mathsf{sse}\ \beta) \wedge (\neg(\beta\ \mathsf{sse}\ \Psi)))$.

Konsequenz via **39-11**: $x$ hat kein $\mathsf{sse}$_minimales Element.

Beweis **61-25** `b) VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha \subset \Omega))$.

`Thema1` $\beta \in x$.

`2:` Aus `Thema1`“$\beta \in x$” und
aus `VS` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha \subset \Omega))$”
folgt: $\exists\Psi : (\Psi \in x) \wedge (\beta \subset \Psi)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Psi \in x \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: $\Psi$ Menge.

`4:` Aus `3`“$\beta$ Menge” und
aus `2`“$\ldots \beta \subset \Psi$”
folgt via **61-6**: $\beta_{-}\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}{}_{-}\Psi$.

`5.1:` Aus `4`“$\beta_{-}\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}{}_{-}\Psi$”
folgt via **41-3**: $\beta \;\mathsf{sse}\; \Psi$.

`5.2:` Via **61-8** gilt: $\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch.

`6:` Aus `5.2`“$\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch” und
aus `4`“$\beta_{-}\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}{}_{-}\Psi$”
folgt via **46-1**: $\neg(\Psi \;\mathsf{sse}\; \beta)$.

`7:` Aus `2`“$\exists\Psi \ldots$”,
aus `2`“$\ldots \Psi \in x \ldots$”,
aus `5.1`“$\beta \;\mathsf{sse}\; \Psi$” und
aus `6`“$\neg(\Psi \;\mathsf{sse}\; \beta)$”
folgt: $\exists\Psi : (\Psi \in x) \wedge (\beta \;\mathsf{sse}\; \Psi) \wedge (\neg(\Psi \;\mathsf{sse}\; \beta))$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\exists\Psi : (\Psi \in x) \wedge (\beta \;\mathsf{sse}\; \Psi) \wedge (\neg(\Psi \;\mathsf{sse}\; \beta)))$.

Konsequenz via **39-11**: $x$ hat kein $\mathsf{sse}$_maximales Element.

□

**61-26.** Die leere Menge ist das einzige sse_minimale Element von $\mathcal{U}$. Das Universum hat kein sse_maximales Element:

**61-26(Satz)**

a) 0 *ist* sse_*minimales Element von* $\mathcal{U}$.

b) *Aus "$\mu in$ ist* sse_*minimales Element von* $\mathcal{U}$*" folgt "*$\mu in = 0$*".*

c) $\mathcal{U}$ *hat kein* sse_*maximales Element.*

Beweis **61-26** `a)`

`1:` Via **61-19** gilt: $0$ ist $\mathsf{sse}$_Minimum von $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`“$0$ ist $\mathsf{sse}$_Minimum von $\mathcal{U}$”
folgt via **40-1**: $0$ ist $\mathsf{sse}$_minimales Element von $\mathcal{U}$.

`b)` `VS` gleich $\mu in$ ist $\mathsf{sse}$_minimales Element von $\mathcal{U}$.

`1.1:` Via **61-8** gilt: $\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch.

`1.2:` Via **61-19** gilt: $0$ ist $\mathsf{sse}$_Minimum von $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{sse}$ antiSymmetrisch”,
aus `1.2`“$0$ ist $\mathsf{sse}$_Minimum von $\mathcal{U}$” und
aus `VS` gleich “$\mu in$ ist $\mathsf{sse}$_minimales Element von $\mathcal{U}$”
folgt via **46-8**: $0 = \mu in$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mu in = 0$.

`c)`

| `Thema1` $\alpha \in \mathcal{U}$. |
|---|
| `2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{U}$” folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge. |
| `3:` Aus `2`“$\alpha$ Menge” folgt via $\subset$**InduktionsSatz Mengen**: $\exists \Omega : (\Omega$ Menge$) \wedge (\alpha \subset \Omega)$. |
| `4:` Aus `3`“$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$” folgt via **0-19**: $\Omega \in \mathcal{U}$. |
| `5:` Aus `3`“$\exists \Omega \ldots$”, aus `4`“$\Omega \in \mathcal{U}$” und aus `2`“$\ldots \alpha \subset \Omega$” folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha \subset \Omega)$. |

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in \mathcal{U}) \wedge (\alpha \subset \Omega))$.

Konsequenz via **61-25**: $\mathcal{U}$ hat kein $\mathsf{sse}$_maximales Element.

$\square$

**61-27.** Die universelle InklusionsRelation ist unten Stark Vollständig, doch oben Nicht-Stark-Vollständig:

**61-27(Satz)**

a) sse *unten Stark Vollständig.*

b) sse *oben Nicht-Stark-Vollständig.*

Beweis **61-27** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})$.

2: Aus Thema1“$0 \neq \alpha \ldots$”
folgt via **61-12**: $\bigcap \alpha$ ist $\mathsf{sse}$_Infimum von $\alpha$.

3: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \bigcap \alpha$.

4: Aus 3“$\ldots \Omega = \bigcap \alpha$” und
aus 2“$\bigcap \alpha$ ist $\mathsf{sse}$_Infimum von $\alpha$”
folgt: $\Omega$ ist $\mathsf{sse}$_Infimum von $\alpha$.

5: Aus 3“$\exists \Omega \ldots$” und
aus 4“$\Omega$ ist $\mathsf{sse}$_Infimum von $\alpha$”
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\mathsf{sse}$_Infimum von $\alpha$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{sse})) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist $\mathsf{sse}$_Infimum von $\alpha)$.

Konsequenz via **50-1(Def)**: $\mathsf{sse}$ unten Stark Vollständig.

b)

1.1: Via **0-18** gilt: $0 \neq \mathcal{U}$.

1.2: Via **61-8** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse}) = \mathcal{U}$.

1.3: Via **0-6** gilt: $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$.

1.4: Via **61-18** gilt: $\mathcal{U}$ hat kein $\mathsf{sse}$_Supremum.

2: Aus 1.3“$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$” und
aus 1.2“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{sse}) = \mathcal{U}$”
folgt: $\mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})$.

3: Aus 1.1“$0 \neq \mathcal{U}$” und
aus 2“$\mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})$”
folgt: $0 \neq \mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})$.

4: Aus 3“$0 \neq \mathcal{U} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{sse})$” und
aus 1.4“$\mathcal{U}$ hat kein $\mathsf{sse}$_Supremum”
folgt via **59-3**: $\mathsf{sse}$ oben Nicht-Stark-Vollständig.

$\square$

**61-28.** Ist sse oben Stark *Ketten*Vollständig? Oder nicht?

**61-28.Bemerkung**

Gemäß **61-27** ist sse unten Stark Vollständig, also ist sse via **55-6** auch unten Stark KettenVollständig. Wie in **61-27** ausserdem fest gestellt wird, ist sse oben Nicht-Stark-Vollständig. Dies schließt nicht aus, dass sse oben Stark KettenVollständig ist - in der Tat müsste hierfür gezeigt werden, dass die Vereinigung jeder nicht leeren sse_Kette - die auch eine Unmenge sein kann - eine Menge ist. Dies kann getrost bezweifelt werden, auch wenn es mir an Mitteln fehlt - wie sollte etwa eine sse_Kette, die eine Unmenge ist, konstruiert werden? - die Zweifel in einen Beweis umzumünzen.

binär-cartesisches Produkt: binäre Vereinigung.
binärer Durchschnitt.

**Ersterstellung: 27/05/07** **Letzte Änderung: 25/05/11**

**62-1.** Es folgen sechs Gleichungen mit binär-cartesischem Produkt und binärer Vereinigung oder binärem Durchschnitt:

**62-1(Satz)**

a) $(x \cup y) \times z = (x \times z) \cup (y \times z)$.

b) $z \times (x \cup y) = (z \times x) \cup (z \times y)$.

c) $(x \cup y) \times (z \cup w) = ((x \times z) \cup (x \times w)) \cup ((y \times z) \cup (y \times w))$.

d) $(x \cap y) \times z = (x \times z) \cap (y \times z)$.

e) $z \times (x \cap y) = (z \times x) \cap (z \times y)$.

f) $(x \cap y) \times (z \cap w) = (x \times z) \cap (y \times w)$.

<u>Beweis **62-1**</u> `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in (x \cup y) \times z.$

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (x \cup y) \times z$"
folgt via **6-5**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x \cup y) \wedge (\Psi \in z) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$$

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in x \cup y \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in x) \vee (\Omega \in y).$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\Omega \in x.$

`4:` Aus `3.1.Fall` "$\Omega \in x$" und
aus `2` "$\ldots \Psi \in z \ldots$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in x \times z.$

`5:` Aus `4` "$(\Omega, \Psi) \in x \times z$"
folgt via **2-2**: $(\Omega, \Psi) \in (x \times z) \cup (y \times z).$

`6:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus `5` "$(\Omega, \Psi) \in (x \times z) \cup (y \times z)$"
folgt: $\alpha \in (x \times z) \cup (y \times z).$

`3.2.Fall` $\Omega \in y.$

`4:` Aus `3.2.Fall` "$\Omega \in y$" und
aus `2` "$\ldots \Psi \in z \ldots$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in y \times z.$

`5:` Aus `4` "$(\Omega, \Psi) \in y \times z$"
folgt via **2-2**: $(\Omega, \Psi) \in (x \times z) \cup (y \times z).$

`6:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus `5` "$(\Omega, \Psi) \in (x \times z) \cup (y \times z)$"
folgt: $\alpha \in (x \times z) \cup (y \times z).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$\alpha \in (x \times z) \cup (y \times z).$$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \cup y) \times z) \Rightarrow (\alpha \in (x \times z) \cup (y \times z)).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(x \cup y) \times z \subseteq (x \times z) \cup (y \times z)$"

Beweis **62-1** `a)` ...

`1.2:` Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

`1.3:` Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

`2.1:` Aus `1.2` "$x \subseteq x \cup y$"
folgt via **6-7**: $x \times z \subseteq (x \cup y) \times z$.

`2.2:` Aus `1.3` "$y \subseteq x \cup y$"
folgt via **6-7**: $y \times z \subseteq (x \cup y) \times z$.

`3:` Aus `2.1` "$x \times z \subseteq (x \cup y) \times z$" und
aus `2.2` "$y \times z \subseteq (x \cup y) \times z$"
folgt via **2-12**: `A2` | "$(x \times z) \cup (y \times z) \subseteq (x \cup y) \times z$"

`1.4:` Aus `A1` gleich "$(x \cup y) \times z \subseteq (x \times z) \cup (y \times z)$" und
aus `A2` gleich "$(x \times z) \cup (y \times z) \subseteq (x \cup y) \times z$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \cup y) \times z = (x \times z) \cup (y \times z)$.

`b)`

$$z \times (x \cup y) \stackrel{\mathbf{12\text{-}13}}{=} ((z \times (x \cup y))^{-1})^{-1} \stackrel{\mathbf{12\text{-}13}}{=} ((x \cup y) \times z)^{-1}$$
$$\stackrel{\text{a)}}{=} ((x \times z) \cup (y \times z))^{-1} \stackrel{\mathbf{12\text{-}1}}{=} ((x \times z)^{-1}) \cup ((y \times z)^{-1})$$
$$\stackrel{\mathbf{12\text{-}13}}{=} (z \times x) \cup (z \times y).$$

`c)`

$$(x \cup y) \times (z \cup w) \stackrel{\text{a)}}{=} (x \times (z \cup w)) \cup (y \times (z \cup w))$$
$$\stackrel{\text{b)}}{=} ((x \times z) \cup (x \times w)) \cup ((y \times z) \cup (y \times w)).$$

`d)`

`1.1:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq x$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq y$.

`2.1:` Aus `1.1` "$x \cap y \subseteq x$"
folgt via **6-7**: $(x \cap y) \times z \subseteq x \times z$.

`2.2:` Aus `1.2` "$x \cap y \subseteq y$"
folgt via **6-7**: $(x \cap y) \times z \subseteq y \times z$.

`3:` Aus `2.1` "$(x \cap y) \times z \subseteq x \times z$" und
aus `2.2` "$(x \cap y) \times z \subseteq y \times z$"
folgt via **2-12**: `A1` | "$(x \cap y) \times z \subseteq (x \times z) \cap (y \times z)$"

...

<u>Beweis</u> **62-1** `d)` ...

`Thema1.3` $\alpha \in (x \times z) \cap (y \times z)$.

`2.1:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in (x \times z) \cap (y \times z)$”
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in (x \times z) \cap (y \times z)$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x \times z) \wedge (\alpha \in y \times z)$.

`3.1:` Aus `2.2`“$\alpha \in x \times z \ldots$”
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in z) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`3.2:` Aus `2.2`“$\ldots \alpha \in y \times z$”
folgt via **6-5**: $\exists \Phi, \Upsilon : (\Phi \in y) \wedge (\Upsilon \in z) \wedge (\alpha = (\Phi, \Upsilon))$.

`4:` Aus `2.1`“$\alpha$ Menge” und
aus `3.1`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$”
folgt: $(\Omega, \Psi)$ Menge.

`5:` Aus `3.1`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus `3.2`“$\ldots \alpha = (\Phi, \Upsilon)$”
folgt: $(\Omega, \Psi) = (\Phi, \Upsilon)$.

`6:` Aus `5`“$(\Omega, \Psi) = (\Phi, \Upsilon)$” und
aus `4`“$(\Omega, \Psi)$ Menge”
folgt via **IGP**: $(\Omega = \Phi) \wedge (\Psi = \Upsilon)$.

`7:` Aus `6`“$\Omega = \Phi \ldots$” und
aus `3.2`“$\ldots \Phi \in y \ldots$”
folgt: $\Omega \in y$.

`8:` Aus `3.1`“$\ldots \Omega \in x \ldots$” und
aus `7`“$\Omega \in y$”
folgt via **2-2**: $\Omega \in x \cap y$.

`9:` Aus `8`“$\Omega \in x \cap y$”
und aus `3.1`“$\ldots \Psi \in z \ldots$”
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in (x \cap y) \times z$.

`10:` Aus `3.1`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus `9`“$(\Omega, \Psi) \in (x \cap y) \times z$”
folgt: $\alpha \in (x \cap y) \times z$.

...

Beweis **62-1** `d)` ...

Ergo `Thema1.3`: $\forall\alpha : (\alpha \in (x \times z) \cap (y \times z)) \Rightarrow (\alpha \in (x \cap y) \times z)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}(x \times z) \cap (y \times z) \subseteq (x \cap y) \times z\text{”}}$

`1.4`: Aus `A1` gleich “$(x \cap y) \times z \subseteq (x \times z) \cap (y \times z)$” und
aus `A2` gleich “$(x \times z) \cap (y \times z) \subseteq (x \cap y) \times z$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \cap y) \times z = (x \times z) \cap (y \times z)$.

`e)`

$$z \times (x \cap y) \stackrel{\mathbf{12-13}}{=} ((z \times (x \cap y))^{-1})^{-1} \stackrel{\mathbf{12-13}}{=} ((x \cap y) \times z)^{-1}$$
$$\stackrel{\texttt{d)}}{=} ((x \times z) \cap (y \times z))^{-1} \stackrel{\mathbf{12-1}}{=} ((x \times z)^{-1}) \cap ((y \times z)^{-1})$$
$$\stackrel{\mathbf{12-13}}{=} (z \times x) \cap (z \times y).$$

`f)`

`1.1`: Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq x$.

`1.2`: Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq y$.

`1.3`: Via **2-7** gilt: $z \cap w \subseteq z$.

`1.4`: Via **2-7** gilt: $z \cap w \subseteq w$.

`2.1`: Aus `1.1`“$x \cap y \subseteq x$” und
aus `1.3`“$z \cap w \subseteq z$”
folgt via **6-7**: $(x \cap y) \times (z \cap w) \subseteq x \times z$.

`2.2`: Aus `1.2`“$x \cap y \subseteq y$” und
aus `1.4`“$z \cap w \subseteq w$”
folgt via **6-7**: $(x \cap y) \times (z \cap w) \subseteq y \times w$.

`3`: Aus `2.1`“$(x \cap y) \times (z \cap w) \subseteq x \times z$” und
aus `2.2`“$(x \cap y) \times (z \cap w) \subseteq y \times w$”
folgt via **2-12**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}(x \cap y) \times (z \cap w) \subseteq (x \times z) \cap (y \times w)\text{”}}$

...

<u>Beweis **62-1**</u> `f)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.5}}$ $\alpha \in (x \times z) \cap (y \times w)$.

`2.1:` Aus `Thema1.5`“$\alpha \in (x \times z) \cap (y \times w)$”
folgt via **ElementAxiom**: $\alpha$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.5`“$\alpha \in (x \times z) \cap (y \times w)$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x \times z) \wedge (\alpha \in y \times w)$.

`3.1:` Aus 2“$\alpha \in x \times z \ldots$”
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in x) \wedge (\Psi \in z) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`3.2:` Aus 2“$\ldots \alpha \in y \times w$”
folgt via **6-5**: $\exists \Phi, \Upsilon : (\Phi \in y) \wedge (\Upsilon \in w) \wedge (\alpha = (\Phi, \Upsilon))$.

`4:` Aus `2.1`“$\alpha$ Menge” und
aus `3.1`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$”
folgt: $(\Omega, \Psi)$ Menge.

`5:` Aus `3.1`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus `3.2`“$\ldots \alpha = (\Phi, \Upsilon)$”
folgt: $(\Omega, \Psi) = (\Phi, \Upsilon)$.

`6:` Aus 4“$(\Omega, \Psi)$ Menge” und
aus 5“$(\Omega, \Psi) = (\Phi, \Upsilon)$”
folgt via **IGP**: $(\Omega = \Phi) \wedge (\Psi = \Upsilon)$.

`7.1:` Aus 5“$\Omega = \Phi \ldots$” und
aus `3.2`“$\ldots \Phi \in y \ldots$”
folgt: $\Omega \in y$.

`7.2:` Aus 5“$\ldots \Psi = \Upsilon$” und
aus `3.2`“$\ldots \Upsilon \in w \ldots$”
folgt: $\Psi \in w$.

...

...

Beweis **62-1** `f)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.5}}$ $\alpha \in (x \times z) \cap (y \times w)$.

...

`8.1:` Aus `3.1`"... $\Omega \in x$ ..." und
aus `7.1`"$\Omega \in y$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in x \cap y$.

`8.2:` Aus `3.1`"... $\Psi \in z$ ..." und
aus `7.2`"$\Psi \in w$"
folgt via **2-2**: $\Psi \in z \cap w$.

`9:` Aus `8.1`"$\Omega \in x \cap y$" und
aus `8.2`"$\Psi \in z \cap w$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Psi) \in (x \cap y) \times (z \cap w)$.

`10:` Aus `3.1`"... $\alpha = (\Omega, \Psi)$" und
aus `9`"$(\Omega, \Psi) \in (x \cap y) \times (z \cap w)$"
folgt: $\alpha \in (x \cap y) \times (z \cap w)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \times z) \cap (y \times w)) \Rightarrow (\alpha \in (x \cap y) \times (z \cap w))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$(x \times z) \cap (y \times w) \subseteq (x \cap y) \times (z \cap w)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$(x \cap y) \times (z \cap w) \subseteq (x \times z) \cap (y \times w)$" und
aus `A2` gleich "$(x \times z) \cap (y \times w) \subseteq (x \cap y) \times (z \cap w)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \cap y) \times (z \cap w) = (x \times z) \cap (y \times w)$.

$\square$

**62-2.** Beim folgenden Resultat über binär-cartesisches Produkt und binäre Vereinigung kann, wie in **62-4(BSP)** gesagt, die "TeilKlassen-Aussage" nicht ohne Weiteres in eine Gleichung übergeführt werden:

**62-2(Satz)**

$$(x \times z) \cup (y \times w) \subseteq (x \cup y) \times (z \cup w).$$

Beweis **62-2**

1.1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

1.2: Via **2-7** gilt: $z \subseteq z \cup w$.

1.3: Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

1.4: Via **2-7** gilt: $w \subseteq z \cup w$.

2.1: Aus 1.1"$x \subseteq x \cup y$" und
aus 1.2"$z \subseteq z \cup w$"
folgt via **6-7**: $x \times z \subseteq (x \cup y) \times (z \cup w)$.

2.2: Aus 1.3"$y \subseteq x \cup y$" und
aus 1.4"$w \subseteq z \cup w$"
folgt via **6-7**: $y \times w \subseteq (x \cup y) \times (z \cup w)$.

3: Aus 2.1"$x \times z \subseteq (x \cup y) \times (z \cup w)$" und
aus 2.2"$y \times w \subseteq (x \cup y) \times (z \cup w)$"
folgt via **2-12**: $(x \times z) \cup (y \times w) \subseteq (x \cup y) \times (z \cup w)$.

□

**62-3.** Mit der folgenden Bemerkung wird **62-4(BSP)** vorweggenommen:

**62-3.Bemerkung**

Die Gleichung
"$(x \times z) \cup (y \times w) = (x \cup y) \times (z \cup w)$"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

**62-4.** Mit dem folgenden Beispiel wird geklärt, dass in **62-2** keine Gleichung an Stelle der "TeilKlassen-Aussage" erwartet werden kann:

**<u>62-4.BEISPIEL</u>**

Es gelte:

$\rightarrow$) $p$ Menge.

$\rightarrow$) $x = \{p\}$.

$\rightarrow$) $y = 0$.

$\rightarrow$) $z = 0$.

$\rightarrow$) $w = \{p\}$.

Dann folgt:

a) $x \times z = 0$.

b) $y \times w = 0$.

c) $(x \times z) \cup (y \times w) = 0$.

d) $x \cup y = \{p\}$.

e) $z \cup w = \{p\}$.

f) $(x \cup y) \times (z \cup w) = \{p\} \times \{p\} = \{(p, p)\}$.

g) $(x \times z) \cup (y \times w) \subseteq (x \cup y) \times (z \cup w)$.

h) $(x \times z) \cup (y \times w) \subset (x \cup y) \times (z \cup w)$.

i) $(x \times z) \cup (y \times w) \neq (x \cup y) \times (z \cup w)$.

$M \subseteq n$:

untere $M/n$_Schranke.
obere $M/n$_Schranke.
$M/n$_Minimum.
$M/n$_Maximum.

**Ersterstellung: 21/05/07** **Letzte Änderung: 25/05/11**

**63-1.** Aus $M \subseteq n$ folgt, dass jede $M$_Schranke eine $n$_Schranke ist:

**63-1(Satz)**

a) *Aus "$M \subseteq n$" und "$u$ untere $M$_Schranke von $x$" folgt "$u$ untere $n$_Schranke von $x$".*

b) *Aus "$M \subseteq n$" und "$o$ obere $M$_Schranke von $x$" folgt "$o$ obere $n$_Schranke von $x$".*

Beweis **63-1** a) VS gleich $(M \subseteq n) \wedge (u$ untere $M$_Schranke von $x)$.

1.1: Aus VS gleich "... $u$ untere $M$_Schranke von $x$"
folgt via **35-1(Def)**: $u \in \mathsf{dom}\, M$.

2: Aus VS gleich "$M \subseteq n$ ..."
folgt via **7-10**: $\mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, n$.

3: Aus 1.1 "$u \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus 2 "$\mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, n$"
folgt via **0-4**: A1 | "$u \in \mathsf{dom}\, n$"

Thema1.2 $\alpha \in x$.

2: Aus VS gleich "... $u$ untere $M$_Schranke von $x$" und
aus Thema1.2 "$\alpha \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: $u$_$M$_$\alpha$.

3: Aus VS gleich "$M \subseteq n$ ..." und
aus 2 "$u$_$M$_$\alpha$"
folgt via **30-5**: $u$_$n$_$\alpha$.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u$_$n$_$\alpha)$"

1.3: Aus A1 gleich "$u \in \mathsf{dom}\, n$" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (u$_$n$_$\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: $u$ untere $n$_Schranke von $x$.

<u>Beweis **63-1**</u> `b)` `VS` gleich $(M \subseteq n) \wedge (o \text{ obere } M\_\text{Schranke von } x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots o$ obere $M$_Schranke von $x$"
folgt via **35-1(Def)**: $o \in \mathsf{ran}\, M$.

`2:` Aus `VS` gleich "$M \subseteq n \ldots$"
folgt via **7-10**: $\mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, n$.

`3:` Aus `1.1`"$o \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus `2`"$\mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, n$"
folgt via **0-4**: `A1` | "$o \in \mathsf{ran}\, n$"

---

`Thema1.2` $\alpha \in x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots o$ obere $M$_Schranke von $x$" und
aus `Thema1.2`"$\alpha \in x$"
folgt via **35-1(Def)**: $\alpha\_M\_o$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M \subseteq n \ldots$" und
aus `2`"$\alpha\_M\_o$"
folgt via **30-5**: $\alpha\_n\_o$.

---

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_n\_o)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$o \in \mathsf{ran}\, n$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_n\_o)$"
folgt via **35-1(Def)**: $o$ obere $n$_Schranke von $x$.

□

**63-2.** Aus $M \subseteq n$ folgt, dass jedes $M$_Minimum/$M$_Maximum ein $n$_Minimum/$n$_Maximum ist:

**63-2(Satz)**

a) *Aus "$M \subseteq n$" und "min ist $M$_Minimum von $x$" folgt "min ist $n$_Minimum von $x$".*

b) *Aus "$M \subseteq n$" und "max ist $M$_Maximum von $x$" folgt "max ist $n$_Maximum von $x$".*

Beweis **63-2** a) VS gleich $(M \subseteq n) \wedge (min$ ist $M$_Minimum von $x)$.

1: Aus VS gleich "... $min$ ist $M$_Minimum von $x$"
folgt via **38-1(Def)**: $(min$ untere $M$_Schranke von $x) \wedge (min \in x)$.

2: Aus VS gleich "$M \subseteq n$ ..." und
aus 1"$min$ untere $M$_Schranke von $x$ ..."
folgt via **63-1**: $min$ untere $n$_Schranke von $x$.

3: Aus 2"$min$ untere $n$_Schranke von $x$" und
aus 1"... $min \in x$"
folgt via **38-1(Def)**: $min$ ist $n$_Minimum von $x$.

b) VS gleich $(M \subseteq n) \wedge (max$ ist $M$_Maximum von $x)$.

1: Aus VS gleich "... $max$ ist $M$_Maximum von $x$"
folgt via **38-1(Def)**: $(max$ obere $M$_Schranke von $x) \wedge (max \in x)$.

2: Aus VS gleich "$M \subseteq n$ ..." und
aus 1"$max$ obere $M$_Schranke von $x$ ..."
folgt via **63-1**: $max$ obere $n$_Schranke von $x$.

3: Aus 2"$max$ obere $n$_Schranke von $x$" und
aus 1"... $max \in x$"
folgt via **38-1(Def)**: $max$ ist $n$_Maximum von $x$.

□

**$M$_induzierte Relation in $z$.**

**Ersterstellung: 21/05/07** **Letzte Änderung: 27/05/11**

**64-1.** Die $M$_**induzierte Relation in** $z$ besteht aus genau jenen geordneten Paaren von $M$, die auch in $z \times z$ sind:

**64-1(Definition)**

"$\mathfrak{C}$ **ist** $M$_**induzierte Relation in** $z$" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = M \cap (z \times z).$$

**64-2.** Wie erwartet, folgen die ersten Erläuterungen zur $M$_induzierten Relation in $z$:

**64-2(Satz)**

a) *$M \cap (z \times z)$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"*
*und "$\mathfrak{D}$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"*
*folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

Beweis **64-2** a)

Aus "$M \cap (z \times z) = M \cap (z \times z)$"
folgt via **64-1(Def)**: $M \cap (z \times z)$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.

b)
VS gleich ($\mathfrak{C}$ ist $M$_induzierte Relation in $z$) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ ist $M$_induzierte Relation in $z$).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ ist $M$_induzierte Relation in $z \ldots$"
folgt via **64-1(Def)**: $\mathfrak{C} = M \cap (z \times z)$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-1(Def)**: $\mathfrak{D} = M \cap (z \times z)$.

2: Aus 1.1"$\mathfrak{C} = M \cap (z \times z)$" und
aus 1.2"$\mathfrak{D} = M \cap (z \times z)$"
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

**64-3.** Es überrascht wenig, dass die $M$_induzierte Relation in $z$ eine Relation in $z$ und eine TeilKlasse von $M$ ist. Auch ist fest zu stellen, dass wenn die $M$_induzierte Relation $R$ in $z$ eine Relation in $x$ ist, diese Relation $R$ auch die $M$_induzierte Relation in $z \cap x$ ist. Ausserdem gilt, dass die $M$_induzierte Relation in $z$ die "größte" Relation in $z$ ist, die TeilKlasse von $M$ ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c) - d)`:

**64-3(Satz)**

a) *Aus "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" folgt "$R$ Relation in $z$".*

b) *Aus "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" folgt "$R \subseteq M$".*

c) *Aus "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"*
*und "$R$ Relation in $x$"*
*folgt "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z \cap x$".*

d) *Aus "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"*
*und "$r$ Relation in $z$" und "$r \subseteq M$"*
*folgt "$r \subseteq R$".*

Beweis **64-3** `ab)` `VS` gleich $R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.

`1:` Aus `VS` gleich "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-1(Def)**: $R = M \cap (z \times z)$.

`2.1:` Via **2-7** gilt: $M \cap (z \times z) \subseteq M$.

`2.2:` Via **2-7** gilt: $M \cap (z \times z) \subseteq z \times z$.

`3.b):` Aus `1`"$R = M \cap (z \times z)$" und
aus `2.1`"$M \cap (z \times z) \subseteq M$"
folgt: $R \subseteq M$.

`3.1:` Aus `1`"$R = M \cap (z \times z)$" und
aus `2.2`"$M \cap (z \times z) \subseteq z \times z$"
folgt: $R \subseteq z \times z$.

`4.a):` Aus `3.1`"$R \subseteq z \times z$"
folgt via **10-1(Def)**: $R$ Relation in $z$.

<u>Beweis **64-3**</u> `c)` `VS` gleich ($R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$) $\wedge$ ($R$ Relation in $x$).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$... "
folgt via **64-1(Def)**: $R = M \cap (z \times z)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "... $R$ Relation in $x$"
folgt via **10-1(Def)**: $R \subseteq x \times x$.

`2:` Aus `1.2`"$R \subseteq x \times x$"
folgt via **2-10**: $R \cap (x \times x) = R$.

`3:`
$$R \stackrel{2}{=} R \cap (x \times x) \stackrel{1.1}{=} (M \cap (z \times z)) \cap (x \times x)$$
$$\stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} M \cap ((z \times z) \cap (x \times x)) \stackrel{\mathbf{62-1}}{=} M \cap ((z \cap x) \times (z \cap x)).$$

`4:` Aus `3`"$R = \ldots = M \cap ((z \cap x) \times (z \cap x))$"
folgt via **64-1(Def)**: $R$ ist $M$_induzierte Relation in $z \cap x$.

`d)` `VS` gleich ($R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$) $\wedge$ ($r$ Relation in $z$) $\wedge$ ($r \subseteq M$).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$... "
folgt via **64-1(Def)**: $R = M \cap (z \times z)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "... $r$ Relation in $z$ ..."
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq z \times z$.

`2:` Aus `VS` gleich "... $r \subseteq M$" und
aus `1.2`"$r \subseteq z \times z$"
folgt via **2-12**: $r \subseteq M \cap (z \times z)$.

`3:` Aus `2`"$r \subseteq M \cap (z \times z)$" und
aus `1.1`"$R = M \cap (z \times z)$"
folgt: $r \subseteq R$.

□

**64-4.** Für das weitere ist es hilfreich, das folgende Kriterium für $p\_R\_q$ zur Verfügung zu haben, wenn $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist:

**<u>64-4(Satz)</u>**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $p\_R\_q$.

`ii)` *"$p\_M\_q$" und "$p \in z$" und "$q \in z$".*

<u>Beweis **64-4**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p\_R\_q$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$)"$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-1**: $R = M \cap (z \times z)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p\_R\_q$"
folgt: $(p, q) \in R$.

`2:` Aus `1.2`"$(p, q) \in R$" und
aus `1.1`"$R = M \cap (z \times z)$"
folgt: $(p, q) \in M \cap (z \times z)$.

`3:` Aus `2`"$(p, q) \in M \cap (z \times z)$"
folgt via **2-2**: $((p, q) \in M) \wedge ((p, q) \in z \times z)$.

`4.1:` Aus `3`"$(p, q) \in M \ldots$"
folgt: $p\_M\_q$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots (p, q) \in z \times z$"
folgt via **6-6**: $(p \in z) \wedge (q \in z)$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(p\_M\_q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

<u>Beweis</u> **64-4** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p\_M\_q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$p\_M\_q \ldots$"
folgt: $(p, q) \in M$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$\ldots p \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \in z$"
folgt via **6-6**: $(p, q) \in z \times z$.

`2`: Aus `1.1`"$(p, q) \in M$" und
aus `1.2`"$(p, q) \in z \times z$"
folgt via **2-2**: $(p, q) \in M \cap z \times z$.

`3`: Aus →)"$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-1(Def)**: $R = M \cap (z \times z)$.

`4`: Aus `2`"$(p, q) \in M \cap z \times z$" und
aus `3`"$R = M \cap (z \times z)$"
folgt: $(p, q) \in R$.

`5`: Aus `4`"$(p, q) \in R$"
folgt: $p\_R\_q$.

□

**64-5.** Via Negation ergibt sich aus **64-4** ein Kriterium für $\neg(p\_R\_q)$, wobei $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist:

<u>**64-5(Satz)**</u>

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $\neg(p\_R\_q)$.

`ii)` *"$\neg(p\_M\_q)$" oder "$p \notin z$" oder "$q \notin z$".*

<u>Beweis **64-5**</u>

`1:` Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-4**: $(p\_R\_q) \Leftrightarrow ((p\_M\_q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(p\_R\_q)) \Leftrightarrow (\neg((p\_M\_q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(p\_R\_q)) \Leftrightarrow ((\neg(p\_M\_q) \vee (\neg(p \in z)) \vee (\neg(q \in z))))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\neg(p\_R\_q)) \Leftrightarrow ((\neg(p\_M\_q) \vee (p \notin z) \vee (q \notin z)))$.

$\square$

**64-6.** Falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und falls $r$ die $n$_induzierte Relation in $z$ ist und falls $M \subseteq n$ gilt, dann folgt $R \subseteq r$:

**64-6(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$r$ ist $n$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$M \subseteq n$.*

*Dann folgt "$R \subseteq r$".*

Beweis **64-6**

1.1: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-1(Def)**: $R = M \cap (z \times z)$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "$r$ ist $n$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-1(Def)**: $r = n \cap (z \times z)$.

2: Aus $\rightarrow$) "$M \subseteq n$"
folgt via **2-15**: $M \cap (z \times z) \subseteq n \cap (z \times z)$.

3: Aus 1.1 "$R = M \cap (z \times z)$" und
aus 2 "$M \cap (z \times z) \subseteq n \cap (z \times z)$"
folgt: $R \subseteq n \cap (z \times z)$.

4: Aus 3 "$R \subseteq n \cap (z \times z)$" und
aus 1.2 "$r = n \cap (z \times z)$"
folgt: $R \subseteq r$.

□

**64-7.** Falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und falls $r$ die $n$_induzierte Relation in $y$ ist und falls $z \subseteq y$ gilt, dann folgt $R \subseteq r$:

**64-7(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$r$ ist $M$_induzierte Relation in $y$.*

$\rightarrow$) *$z \subseteq y$.*

*Dann folgt "$R \subseteq r$".*

Beweis **64-7**

1.1: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-1(Def)**: $R = M \cap (z \times z)$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "$r$ ist $M$_induzierte Relation in $y$"
folgt via **64-1(Def)**: $r = M \cap (y \times y)$.

2: Aus $\rightarrow$) "$z \subseteq y$"
folgt via **6-7**: $z \times z \subseteq y \times y$.

3: Aus 2 "$z \times z \subseteq y \times y$"
folgt via **2-15**: $(z \times z) \cap M \subseteq (y \times y) \cap M$.

4: $$R \stackrel{1.1}{=} M \cap (z \times z) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (z \times z) \cap M \stackrel{3}{\subseteq} (y \times y) \cap M \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} M \cap (y \times y) \stackrel{1.2}{=} r.$$

5: Aus 4
folgt: $R \subseteq r$.

□

**64-8.** Falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und falls $r$ die $n$_induzierte Relation in $y$ ist und falls $M \subseteq n$ und $z \subseteq y$ gilt, dann folgt $R \subseteq r$:

**64-8(Satz)**

*Es gelte:*

→) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

→) *$r$ ist $n$_induzierte Relation in $y$.*

→) *$M \subseteq n$.*

→) *$z \subseteq y$.*

*Dann folgt "$R \subseteq r$".*

Beweis **64-8**

1: Via **64-2** gilt: $M \cap (y \times y)$ ist $M$_induzierte Relation in $y$.

2.1: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus 1 "$M \cap (y \times y)$ ist $M$_induzierte Relation in $y$" und
aus →) "$z \subseteq y$"
folgt via **64-7**: $R \subseteq M \cap (y \times y)$.

2.2: Aus 1 "$M \cap (y \times y)$ ist $M$_induzierte Relation in $y$",
aus →) "$r$ ist $n$_induzierte Relation in $y$" und
aus →) "$M \subseteq n$"
folgt via **64-6**: $M \cap (y \times y) \subseteq r$.

3: Aus 2.1 "$R \subseteq M \cap (y \times y)$" und
aus 2.2 "$M \cap (y \times y) \subseteq r$"
folgt via **0-6**: $R \subseteq r$.

□

**64-9.** Es folgt Einiges über Definitions- und Bild-Bereich der $M$_induzierten Relation in $z$:

**64-9(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

*Dann folgt:*

a) $\mathsf{dom}\, R \subseteq z$.

b) $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

c) $\mathsf{ran}\, R \subseteq z$.

d) $\mathsf{ran}\, R \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

Beweis **64-9**

1: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-3**: $(R \subseteq M) \wedge (R \text{ Relation in } z)$.

2.a): Aus 1 "... $R$ Relation in $z$"
folgt via **10-17**: $\mathsf{dom}\, R \subseteq z$.

2.b): Aus 1 "$R \subseteq M$ ..."
folgt via **7-10**: $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2.c): Aus 1 "... $R$ Relation in $z$"
folgt via **10-17**: $\mathsf{ran}\, R \subseteq z$.

2.d): Aus 1 "$R \subseteq M$ ..."
folgt via **7-10**: $\mathsf{ran}\, R \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

$\square$

**64-10.** Mit dem folgenden Satz wird eine Zusammenstellung davon gegeben, inwiefern sich einige der in **#30** vorgestellten Eigenschaften von $M$ auf die $M$_induzierte Relation in $z$ vererben:

**64-10(Satz)**

*Aus "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und ...*

a) ... *und "$M$ reflexiv in $x$" folgt "$R$ reflexiv in $z \cap x$".*

b) ... *und "$M$ reflexiv" folgt "$R$ reflexiv in $z$".*

c) ... *uns "$M$ irreflexiv in $x$" folgt "$R$ irreflexiv in $x$".*

d) ... *und "$M$ irreflexiv in $x$" folgt "$R$ irreflexiv in $z \cap x$".*

e) ... *und "$M$ irreflexiv" folgt "$R$ irreflexiv".*

f) ... *und "$M$ transitiv in $x$" folgt "$R$ transitiv in $x$".*

g) ... *und "$M$ transitiv in $x$" folgt "$R$ transitiv in $z \cap x$".*

h) ... *und "$M$ transitiv" folgt "$R$ transitiv".*

i) ... *und "$M$ antiSymmetrisch in $x$" folgt "$R$ antiSymmetrisch in $x$".*

j) ... *und "$M$ antiSymmetrisch in $x$" folgt "$R$ antiSymmetrisch in $z \cap x$".*

k) ... *und "$M$ antiSymmetrisch" folgt "$R$ antiSymmetrisch".*

l) ... *und "$M$ symmetrisch in $x$" folgt "$R$ symmetrisch in $x$".*

m) ... *und "$M$ symmetrisch in $x$" folgt "$R$ symmetrisch in $z \cap x$".*

n) ... *und "$M$ symmetrisch" folgt "$R$ symmetrisch".*

o) ... *und "$M$ konnex in $x$" folgt "$R$ konnex in $z \cap x$".*

p) ... *und "$M$ konnex" folgt "$R$ konnex in $z$".*

Beweis **64-10** `a)` `VS` gleich $M$ reflexiv in $x$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in z \cap x$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in z \cap x$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in z) \wedge (\alpha \in x)$.

`3:` Aus `VS` gleich “$M$ reflexiv in $x$” und
aus `2`“$\ldots \alpha \in x$”
folgt via **30-17(Def)**: $\alpha\_M\_\alpha$.

`4:` Aus →)“$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$”,
aus `3`“$\alpha\_M\_\alpha$”,
aus `2`“$\alpha \in z \ldots$” und
aus `2`“$\alpha \in z \ldots$”
folgt via **64-4**: $\alpha\_R\_\alpha$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in z \cap x) \Rightarrow (\alpha\_R\_\alpha)$.

Konsequenz via **30-17**: $R$ reflexiv in $z \cap x$.

`b)` `VS` gleich $M$ reflexiv.

`1:` Aus `VS` gleich “$M$ reflexiv”
folgt via **30-17(Def)**: $M$ reflexiv in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus →)“$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$” und
aus `1`“$M$ reflexiv in $\mathcal{U}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $R$ reflexiv in $z \cap \mathcal{U}$.

`3:` Via **2-17** gilt: $z \cap \mathcal{U} = z$.

`4:` Aus `2`“$R$ reflexiv in $z \cap \mathcal{U}$” und
aus `3`“$z \cap \mathcal{U} = z$”
folgt: $R$ reflexiv in $z$.

<u>Beweis **64-10**</u> `c)` `VS` gleich $M$ irreflexiv in $x$.

`1:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-3**: $R \subseteq M$.

`2:` Aus `VS` gleich "$M$ irreflexiv in $x$" und
aus `1` "$R \subseteq M$"
folgt via **30-27**: $R$ irreflexiv in $x$.

`d)` `VS` gleich $M$ irreflexiv in $x$.

`1:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `VS` gleich "$M$ irreflexiv in $x$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $R$ irreflexiv in $x$.

`2:` Via **2-7** gilt: $z \cap x \subseteq x$.

`3:` Aus `1` "$R$ irreflexiv in $x$" und
aus `2` "$z \cap x \subseteq x$"
folgt via **30-27**: $R$ irreflexiv in $z \cap x$.

`e)` `VS` gleich $M$ irreflexiv.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ irreflexiv"
folgt via **30-23(Def)**: $M$ irreflexiv in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `1` "$M$ irreflexiv in $\mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $R$ irreflexiv in $\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2` "$R$ irreflexiv in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-23(Def)**: $R$ irreflexiv.

Beweis **64-10** `f)` `VS` gleich $M$ transitiv in $x$.

`Thema1` $(\alpha \in x) \wedge (\beta \in x) \wedge (\gamma \in x) \wedge (\alpha\_R\_\beta) \wedge (\beta\_R\_\gamma)$.

`2.1:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `Thema1` "$\ldots \alpha\_R\_\beta \ldots$"
folgt via **64-4**: $(\alpha\_M\_\beta) \wedge (\alpha \in z) \wedge (\beta \in z)$.

`2.2:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `Thema1` "$\ldots \beta\_R\_\gamma$"
folgt via **64-4**: $(\beta\_M\_\gamma) \wedge (\gamma \in z)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M$ transitiv in $x$",
aus `Thema1` "$(\alpha \in x) \wedge (\beta \in x) \wedge (\gamma \in x) \ldots$",
aus `2.1` "$\alpha\_M\_\beta \ldots$" und
aus `2.2` "$\ldots \beta\_M\_\gamma$"
folgt via **30-30(Def)**: $\alpha\_M\_\gamma$.

`4:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus `3` "$\alpha\_M\_\gamma$",
aus `2.1` "$\ldots \alpha \in z \ldots$" und
aus `2.2` "$\ldots \gamma \in z$"
folgt via **64-4**: $\alpha\_R\_\gamma$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in x) \wedge (\gamma \in x) \wedge (\alpha\_R\_\beta) \wedge (\beta\_R\_\gamma)) \Rightarrow (\alpha\_R\_\gamma).$$

Konsequenz via **30-30(Def)**: $R$ transitiv in $x$.

Beweis **64-10** `g)` `VS` gleich $M$ transitiv in $x$.

`1.1:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus →) "$M$ transitiv in $x$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $R$ transitiv in $x$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $z \cap x \subseteq x$.

`2:` Aus `1.1` "$R$ transitiv in $x$" und
aus `1.2` "$z \cap x \subseteq x$"
folgt via **30-31**: $R$ transitiv in $z \cap x$.

`h)` `VS` gleich $M$ transitiv.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ transitiv"
folgt via **30-30(Def)**: $M$ transitiv in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `1` "$M$ transitiv in $\mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $R$ transitiv in $\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2` "$R$ transitiv in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-30(Def)**: $R$ transitiv.

<u>Beweis</u> **<u>64-10</u>** `i)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch in $x$.

`1:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-3**: $R \subseteq M$.

`2:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch in $x$" und
aus `1` "$R \subseteq M$"
folgt via **30-46**: $R$ antiSymmetrisch in $x$.

`j)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch in $x$.

`1:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch"
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $R$ antiSymmetrisch in $x$.

`2:` Via **2-7** gilt: $z \cap x \subseteq x$.

`3:` Aus `1` "$R$ antiSymmetrisch in $x$" und
aus `2` "$z \cap x \subseteq x$"
folgt via **30-46**: $R$ antiSymmetrisch in $z \cap x$.

`k)` `VS` gleich $M$ antiSymmetrisch.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ antiSymmetrisch"
folgt via **30-45(Def)**: $M$ antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `1` "$M$ antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $R$ antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2` "$R$ antiSymmetrisch in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-45(Def)**: $R$ antiSymmetrisch.

Beweis **64-10** `l)` `VS` gleich $M$ symmetrisch in $x$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha \in x) \wedge (\beta \in x) \wedge (\alpha\_R\_\beta)$.

`1:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `Thema1` "$\ldots \alpha\_R\_\beta$"
folgt via **64-4**: $(\alpha\_M\_\beta) \wedge (\alpha \in z) \wedge (\beta \in z)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$M$ symmetrisch in $x$",
aus `Thema1` "$(\alpha \in x) \wedge (\beta \in x) \ldots$" und
aus `1` "$\alpha\_M\_\beta \ldots$"
folgt via **30-49(Def)**: $\beta\_M\_\alpha$.

`3:` Aus `2` "$\beta\_M\_\alpha$",
aus `1` "$\ldots \alpha \in z \ldots$" und
aus `1` "$\ldots \beta \in z$"
folgt via **64-4**: $\beta\_R\_\alpha$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in x) \wedge (\alpha\_R\_\beta)) \Rightarrow (\beta\_R\_\alpha)$.

Konsequenz via **30-49(Def)**: $R$ symmetrisch in $x$.

`m)` `VS` gleich $M$ symmetrisch in $x$.

`1:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `VS` gleich "$M$ symmetrisch in $x$"
folgt via des bereits bewiesenen `l)`: $R$ symmetrisch in $x$.

`2:` Via **2-7** gilt: $z \cap x \subseteq x$.

`3:` Aus `1` "$R$ symmetrisch in $x$" und
aus `2` "$z \cap x \subseteq x$"
folgt via **30-50**: $R$ symmetrisch in $z \cap x$.

`n)` `VS` gleich $M$ symmetrisch.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ symmetrisch"
folgt via **30-49(Def)**: $M$ symmetrisch in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `1` "$M$ symmetrisch in $\mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `l)`: $R$ symmetrisch in $\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2` "$R$ symmetrisch in $\mathcal{U}$"
folgt via **30-49(Def)**: $R$ symmetrisch.

<u>Beweis **64-10**</u> `o)` `VS` gleich $M$ konnex in $x$.

`Thema1` $(\alpha \in z \cap x) \wedge (\beta \in z \cap x)$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$\alpha \in z \cap x \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in z) \wedge (\alpha \in x)$.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\ldots \beta \in z \cap x$"
folgt via **2-2**: $(\beta \in z) \wedge (\beta \in x)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$M$ konnex in $x$",
aus `2.1` "$\ldots \alpha \in x$" und
aus `2.2` "$\ldots \beta \in x$"
folgt via **30-64(Def)**: $(\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha) \vee (\alpha = \beta)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha\_M\_\beta$.

`4:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus `3.1.Fall` "$\alpha\_M\_\beta$",
aus `2.1` "$\alpha \in z \ldots$" und
aus `2.2` "$\beta \in z \ldots$"
folgt via **64-4**: $\alpha\_R\_\beta$.

`5:` Aus 4
folgt: $(\alpha\_R\_\beta) \vee (\beta\_R\_\alpha) \vee (\alpha = \beta)$.

`3.2.Fall` $\beta\_M\_\alpha$.

`4:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus `3.1.Fall` "$\beta\_M\_\alpha$",
aus `2.2` "$\beta \in z \ldots$" und
aus `2.1` "$\alpha \in z \ldots$"
folgt via **64-4**: $\beta\_R\_\alpha$.

`5:` Aus 4
folgt: $(\alpha\_R\_\beta) \vee (\beta\_R\_\alpha) \vee (\alpha = \beta)$.

...

...

Beweis **64-10** `o)` `VS` gleich $M$ konnex in $x$.

...

`Thema1` $(\alpha \in z \cap x) \wedge (\beta \in z \cap x)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.3.Fall` $\alpha = \beta$.

Aus `3.3.Fall` folgt: $(\alpha\_R\_\beta) \vee (\beta\_R\_\alpha) \vee (\alpha = \beta)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(\alpha\_R\_\beta) \vee (\beta\_R\_\alpha) \vee (\alpha = \beta)$.

Ergo `Thema1`:
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z \cap x) \wedge (\beta \in z \cap x)) \Rightarrow ((\alpha\_R\_\beta) \vee (\beta\_R\_\alpha) \vee (\alpha = \beta)).$$

Konsequenz via **30-64(Def)**: $R$ konnex in $z \cap x$.

`p)` `VS` gleich $M$ konnex.

`1:` Aus `VS` gleich "$M$ konnex"
folgt via **30-64(Def)**: $M$ konnex in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `1` "$M$ konnex in $\mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `o)`: $R$ konnex in $z \cap \mathcal{U}$.

`3:` Via **2-17** gilt: $z \cap \mathcal{U} = z$.

`4:` Aus `2` "$R$ konnex in $z \cap \mathcal{U}$" und
aus `3` "$z \cap \mathcal{U} = z$"
folgt: $R$ konnex in $z$.

□

**64-11.** In Form einer Bemerkung werden die Aussagen von **64-10** allgemeinen Resultaten aus **#30** gegenüber gestellt:

**64-11.Bemerkung**

- Gemäß **30-32(Bem)** ist die Aussage
  " $((M \text{ transitiv in } x) \wedge (R \subseteq M)) \Rightarrow (R \text{ transitiv in } x)$"
  nicht ohne Weiteresverfügbar.
  Falls jedoch $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und falls $M$ transitiv in $x$ ist, dann gilt via **64-3** zunächst $R \subseteq M$ und gemäß **64-10** folgt in diesem speziellen Fall, dass $R$ transitiv in $x$ ist.

- Gemäß **30-39(Bem)** ist die Aussage
  " $((M \text{ transitiv}) \wedge (R \subseteq M)) \Rightarrow (R \text{ transitiv})$"
  nicht ohne Weiteresverfügbar.
  Falls jedoch $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und falls $M$ transitiv ist, dann gilt via **64-3** zunächst $R \subseteq M$ und gemäß **64-10** folgt in diesem speziellen Fall, dass $R$ transitiv ist.

- Gemäß **30-51(Bem)** ist die Aussage
  " $((M \text{ symmetrisch in } x) \wedge (R \subseteq M)) \Rightarrow (R \text{ symmetrisch in } x)$"
  nicht ohne Weiteres verfügbar.
  Falls jedoch $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und falls $M$ symmetrisch in $x$ ist, dann gilt via **64-3** zunächst $R \subseteq M$ und gemäß **64-10** folgt in diesem speziellen Fall, dass $R$ symmetrisch in $x$ ist.

- Gemäß **30-58(Bem)** ist die Aussage
  " $((M \text{ symmetrisch}) \wedge (R \subseteq M)) \Rightarrow (R \text{ symmetrisch})$"
  nicht ohne Weiteres verfügbar.
  Falls jedoch $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und falls $M$ symmetrisch ist, dann gilt via **64-3** zunächst $R \subseteq M$ und gemäß **64-10** folgt in diesem speziellen Fall, dass $R$ symmetrisch ist.

**64-12.** Nachfolgende Beispiele vorwegnehmend wird in Form einer Bemerkung fest gestellt, dass aus "$M$ reflexiv in $x$" für die $M$_induzierte Relation $R$ in $z$ nicht ohne Weiteres die Aussage "$R$ reflexiv in $x$" folgt. Eine ähnliche Feststellung betrifft Klassen $M$, die konnex in $x$ sind:

**64-12.Bemerkung**

- Die Aussage
"$((R$ ist $M$_induzierte Relation in $z) \wedge (M$ reflexiv in $x))$
$\Rightarrow (R$ reflexiv in $x)$"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
"$((R$ ist $M$_induzierte Relation in $z) \wedge (M$ konnex in $x))$
$\Rightarrow (R$ konnex in $x)$"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

**64-13.** Mit dem folgenden Beispiel wird belegt, dass es durchaus vorkommen kann, dass eine Klasse $M$ reflexiv in $x$ ist, während die $M$_induzierte Relation in $z$ *nicht* reflexiv in $x$ ist:

**64-13.BEISPIEL**

Es gelte:

→) $p$ Menge.

→) $q$ Menge.

→) $p \neq q$.

→) $M = \{(p,p),(q,q)\}$.

→) $x = \{p,q\}$.

→) $z = \{p\}$.

→) $R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.

Dann folgt:

a) $M$ reflexiv in $x$.

b) $R = \{(p,p)\}$.

c) $\neg(R$ reflexiv in $x)$.

Ad c): Es gilt $q \in x$, doch es gilt wegen $(q,q) \notin R$ *nicht* $q$_$R$_$q$.

**64-14.** Mit dem folgenden Beispiel wird belegt, dass es durchaus vorkommen kann, dass eine Klasse $M$ konnex in $x$ ist, während die $M$_induzierte Relation in $z$ *nicht* konnex in $x$ ist:

<u>**64-14.BEISPIEL**</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) $p$ Menge.

$\rightarrow$) $q$ Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p, q)\}$.

$\rightarrow$) $x = \{p, q\}$.

$\rightarrow$) $z = \{p\}$.

$\rightarrow$) $R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.

Dann folgt:

a) $M$ konnex in $x$.

b) $R = 0$.

c) $\neg(R$ konnex in $x)$.

Ad c): Es gilt $(p \in x) \wedge (q \in x)$, doch wegen $R = 0$ gilt $\neg(p\_R\_q)$ und $\neg(q\_R\_p)$ und gemäß Voraussetzung gilt $\neg(p = q)$. Also ist $R$ *nicht* konnex in $x$.

**64-15.** Nun werden $M$_Ketten im Fall, dass $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, $R$_Ketten gegenüber gestellt. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a)`:

**64-15(Satz)**

`a)` *Aus "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und "$K$ ist $M$_Kette" folgt "$z \cap K$ ist $R$_Kette".*

`b)` *Aus "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und "$K$ ist $R$_Kette" folgt "$K$ ist $M$_Kette".*

Beweis **64-15** `b)` `VS` gleich $K$ ist $R$_Kette.

`1:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-3**: $R \subseteq M$.

`2:` Aus `VS` gleich "$K$ ist $R$_Kette" und
aus `1` "$R \subseteq M$"
folgt via **30-73**: $K$ ist $M$_Kette.

Beweis **64-15** `a)` `VS` gleich $K$ ist $M$_Kette.

`Thema1` $(\alpha \in z \cap K) \wedge (\beta \in z \cap K)$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in z \cap K \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in z) \wedge (\alpha \in K)$.

`2.2:` Aus `Thema1`"$\ldots \beta \in z \cap K$"
folgt via **2-2**: $(\beta \in z) \wedge (\beta \in K)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$K$ ist $M$_Kette",
aus `2.1`"$\ldots \alpha \in K$" und
aus `2.2`"$\ldots \beta \in K$"
folgt via **30-68(Def)**: $(\alpha\_M\_\beta) \vee (\beta\_M\_\alpha)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha\_M\_\beta$.

`4:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus `3.1.Fall`"$\alpha\_M\_\beta$",
aus `2.1`"$\alpha \in z \ldots$" und
aus `2.2`"$\beta \in z \ldots$"
folgt via **64-4**: $\alpha\_R\_\beta$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(\alpha\_R\_\beta) \vee (\beta\_R\_\alpha)$.

`3.2.Fall` $\beta\_M\_\alpha$.

`4:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus `3.2.Fall`"$\beta\_M\_\alpha$",
aus `2.2`"$\beta \in z \ldots$" und
aus `2.1`"$\alpha \in z \ldots$"
folgt via **64-4**: $\beta\_R\_\alpha$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(\alpha\_R\_\beta) \vee (\beta\_R\_\alpha)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\alpha\_R\_\beta) \vee (\beta\_R\_\alpha)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z \cap K) \wedge (\beta \in z \cap K)) \Rightarrow ((\alpha\_R\_\beta) \vee (\beta\_R\_\alpha))$.

Konsequenz via **30-68(Def)**: $z \cap K$ ist $R$_Kette.

□

**64-16.** Das nachfolgende Beispiel vorwegnehmend wird in Form einer Bemerkung fest gestellt, dass wenn $K$ eine $M$_Kette ist und wenn $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, die Klasse $K$ nicht unbedingt eine $R$_Kette sein muss:

**64-16.Bemerkung**

Die Aussage
"(($R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$) $\wedge$ ($K$ ist $M$_Kette))
$\Rightarrow$ ($K$ ist $R$_Kette)"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

**64-17.** Mit dem folgenden Beispiel wird belegt, dass es durchaus vorkommen kann, dass eine $M$_Kette *keine* $R$_Kette ist, obwohl $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist:

**<u>64-17.BEISPIEL</u>**

Es gelte:

$\rightarrow$) $p$ Menge.

$\rightarrow$) $q$ Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p,p),(p,q),(q,q)\}$.

$\rightarrow$) $K = \{p,q\}$.

$\rightarrow$) $z = \{p\}$.

$\rightarrow$) $R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.

Dann folgt:

a) $K$ ist $M$_Kette.

b) $R = \{(p,p)\}$.

c) $\neg$($K$ ist $R$_Kette).

Ad c): Es gilt $(p \in K) \wedge (q \in K)$, doch wegen $(p,q) \notin R$ und $(q,p) \notin R$ gilt weder $p$_$R$_$q$ noch $q$_$R$_$p$, so dass $K$ *keine* $R$_Kette sein kann.

**64-18.** In Weiterführung von **64-15/16/17** wird fest gestellt, dass jede $R$_Kette eine TeilKlasse von $\mathsf{dom}\, M, \mathsf{ran}\, M, z$ ist, falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist:

**64-18(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$K$ ist $R$_Kette.*

*Dann folgt:*

a) $K \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

b) $K \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

c) $K \subseteq z$.

Beweis **64-18**

1.1: Aus $\rightarrow$)"$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-3**: $R$ Relation in $z$.

1.2: Aus $\rightarrow$)"$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus $\rightarrow$)"$K$ ist $R$_Kette"
folgt via **64-15**: $K$ ist $M$_Kette.

2.a): Aus 1.2"$K$ ist $M$_Kette"
folgt via **30-69**: $K \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2.b): Aus 1.2"$K$ ist $M$_Kette"
folgt via **30-69**: $K \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

2.c): Aus 1.1"$R$ Relation in $z$" und
aus $\rightarrow$)"$K$ ist $R$_Kette"
folgt via **34-4**: $K \subseteq z$.

$\square$

**64-19.** Nun wird die einschränkung auf $D$ in einem Zusammenhang mit der $M$_induDierten Relation in $D$ gesehen:

**64-19(Satz)**

*Aus "$e$ Einschränkung von $y$ auf $D$"*
*und "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $D$" und ...*

a) ... *und* "$p$_$R$_$e(q)$" *folgt* "$p$_$M$_$y(q)$".

b) ... *und* "$e(p)$_$R$_$q$" *folgt* "$y(p)$_$M$_$q$".

c) ... *und* "$e(p)$_$R$_$e(q)$" *folgt* "$y(p)$_$M$_$y(q)$".

Beweis **64-19** a) VS gleich ($e$ Einschränkung von $y$ auf $D$) $\wedge$($R$ ist $M$_induzierte Relation in $D$) $\wedge$($p$_$R$_$e(q)$).

1: Aus VS gleich "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $D$..." und
aus VS gleich "...$p$_$R$_$e(q)$"
folgt via **64-4**: $p$_$M$_$e(q)$.

2: Aus 1"$p$_$M$_$e(q)$"
folgt via **30-6**: $q \in \mathsf{dom}\, e$.

3: Aus →)"$e$ Einschränkung von $y$ auf $D$" und
aus 2"$q \in \mathsf{dom}\, e$"
folgt via **ES**: $e(q) = y(q)$.

4: Aus 1"$p$_$M$_$e(q)$" und
aus 3"$e(q) = y(q)$"
folgt: $p$_$M$_$y(q)$.

<u>Beweis **64-19**</u> `b)` `VS` gleich $(e$ Einschränkung von $y$ auf $D)$
$\wedge(R$ ist $M$_induzierte Relation in $D)$
$\wedge(e(p)$_$R$_$q)$.

`1:` Aus →) “$R$ ist $M$_induzierte Relation in $D$” und
aus `VS` gleich “$e(p)$_$R$_$q$”
folgt via **64-4**: $e(p)$_$M$_$q$.

`2:` Aus `1`“$e(p)$_$M$_$q$”
folgt via **30-6**: $p \in \mathsf{dom}\, e$.

`3:` Aus →) “$e$ Einschränkung von $y$ auf $D$” und
aus `2`“$p \in \mathsf{dom}\, e$”
folgt via **ES**: $e(p) = y(p)$.

`4:` Aus `1`“$e(p)$_$M$_$q$” und
aus `3`“$e(p) = y(p)$”
folgt: $y(p)$_$M$_$q$.

`c)` `VS` gleich $(e$ Einschränkung von $y$ auf $D)$
$\wedge(R$ ist $M$_induzierte Relation in $D)$
$\wedge(e(p)$_$R$_$e(q))$.

`1:` Aus →) “$e$ Einschränkung von $y$ auf $D$”,
aus →) “$R$ ist $M$_induzierte Relation in $D$” und
aus `VS` gleich “$e(p)$_$R$_$e(q)$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $e(p)$_$M$_$y(q)$.

`2:` Aus `1`“$e(p)$_$M$_$y(q)$”
folgt via **30-6**: $p \in \mathsf{dom}\, e$.

`3:` Aus →) “$e$ Einschränkung von $y$ auf $D$” und
aus `2`“$p \in \mathsf{dom}\, e$”
folgt via **ES**: $e(p) = y(p)$.

`4:` aus `1`“$e(p)$_$M$_$y(q)$” und
aus `3`“$e(p) = y(p)$”
folgt: $y(p)$_$M$_$y(q)$.

□

**64-20.** Wenn $u$ untere $M$_Schranke von $E$ ist, dann ist, wenn $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und falls zusätzlich $u \in \mathsf{dom}\, R$ - oder $u \in z$ und $0 \neq z \cap E$ - gilt, $u$ eine untere $R$_Schranke von $z \cap E$:

**64-20(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$u$ untere $M$_Schranke von $E$.*

$\rightarrow$) $u \in \mathsf{dom}\, R$.

*oder*

$(u \in z) \wedge (0 \neq z \cap E)$.

*Dann folgt "$u$ untere $R$_Schranke von $z \cap E$".*

Beweis **64-20**

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(u \in \mathsf{dom}\, R) \vee ((u \in z) \wedge (0 \neq z \cap E))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $u \in \mathsf{dom}\, R$.

`1.1.2.Fall` $(u \in z) \wedge (0 \neq z \cap E)$.

`2:` Aus `1.1.2.Fall`"$\ldots 0 \neq z \cap E$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in z \cap E$.

`3:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in z \cap E$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in z) \wedge (\Omega \in E)$.

`4:` Aus $\rightarrow$)"$u$ untere $M$_Schranke von $E$" und
aus `3`"$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **35-1(Def)**: $u$_$M$_$\Omega$.

`5:` Aus $\rightarrow$)"$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus `4`"$u$_$M$_$\Omega$",
aus `1.1.2.Fall`"$u \in z \ldots$" und
aus `3`"$\Omega \in z \ldots$"
folgt via **64-4**: $u$_$R$_$\Omega$.

`6:` Aus `5`"$u$_$R$_$\Omega$"
folgt via **30-2**: $u \in \mathsf{dom}\, R$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$u \in \mathsf{dom}\, R$"

`1.2:` Aus $\rightarrow$)"$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-9**: $\mathsf{dom}\, R \subseteq z$.

`2:` Aus `A1` gleich "$u \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\, R \subseteq z$"
folgt via **0-4**: `A2` | "$u \in z$"

...

<u>Beweis</u> **64-20** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in z \cap E$.

`2:` Aus `Thema1.3` "$\alpha \in z \cap E$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in z) \wedge (\alpha \in E)$.

`3:` Aus →) "$u$ untere $M$_Schranke von $E$" und
aus 2 "$\ldots \alpha \in E$"
folgt via **35-1(Def)**: $u\_M\_\alpha$.

`4:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus 3 "$u\_M\_\alpha$",
aus `A2` gleich "$u \in z$" und
aus 2 "$\alpha \in z \ldots$"
folgt via **64-4**: $u\_R\_\alpha$.

Ergo `Thema1.3`: `A3` | "$\forall \alpha : (\alpha \in z \cap E) \Rightarrow (u\_R\_\alpha)$"

`1.4:` Aus `A1` gleich "$u \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `A3` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in z \cap E) \Rightarrow (u\_R\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: $u$ untere $R$_Schranke von $z \cap E$.

□

**64-21.** Wenn $o$ obere $M$_Schranke von $E$ ist, dann ist, wenn $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und falls zusätzlich $o \in \mathsf{ran}\, R$ - oder $o \in z$ und $0 \neq z \cap E$ - gilt, $o$ eine obere $R$_Schranke von $z \cap E$:

**64-21(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$o$ obere $M$_Schranke von $E$.*

$\rightarrow$) $o \in \mathsf{ran}\, R$.

*oder*

$(o \in z) \wedge (0 \neq z \cap E)$.

*Dann folgt "$o$ obere $R$_Schranke von $z \cap E$".*

Beweis **64-21**

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(o \in \mathsf{ran}\, R) \vee ((o \in z) \wedge (0 \neq z \cap E))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $o \in \mathsf{ran}\, R$.

`1.1.2.Fall` $(o \in z) \wedge (0 \neq z \cap E)$.

`2:` Aus `1.1.2.Fall`"$\ldots 0 \neq z \cap E$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in z \cap E$.

`3:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in z \cap E$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in z) \wedge (\Omega \in E)$.

`4:` Aus $\rightarrow$)"$o$ obere $M$_Schranke von $E$" und
aus `3`"$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **35-1(Def)**: $\Omega\_M\_o$.

`5:` Aus $\rightarrow$)"$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus `4`"$\Omega\_M\_o$",
aus `3`"$\Omega \in z \ldots$" und
aus `1.1.2.Fall`"$o \in z \ldots$"
folgt via **64-4**: $\Omega\_R\_o$.

`6:` Aus `5`"$\Omega\_R\_o$"
folgt via **30-2**: $o \in \mathsf{ran}\, R$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$o \in \mathsf{ran}\, R$"

`1.2:` Aus $\rightarrow$)"$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-9**: $\mathsf{ran}\, R \subseteq z$.

`2:` Aus `A1` gleich "$o \in \mathsf{ran}\, R$" und
aus `1.2`"$\mathsf{ran}\, R \subseteq z$"
folgt via **0-4**: `A2` | "$o \in z$"

...

Beweis **64-21** ...

| | |
|---|---|
| `Thema1.3` | $\alpha \in z \cap E$. |
| `2:` Aus `Thema1.3` "$\alpha \in z \cap E$" folgt via **2-2**: | $(\alpha \in z) \wedge (\alpha \in E)$. |
| `3:` Aus →) "$o$ obere $M$_Schranke von $E$" und aus 2 "$\ldots \alpha \in E$" folgt via **35-1(Def)**: | $\alpha$_$M$_$o$. |
| `4:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$", aus 3 "$\alpha$_$M$_$o$", aus 2 "$\alpha \in z \ldots$" und aus `A2` gleich "$o \in z$" folgt via **64-4**: | $\alpha$_$R$_$o$. |

Ergo `Thema1.3`: `A3` | "$\forall \alpha : (\alpha \in z \cap E) \Rightarrow (\alpha$_$R$_$o)$"

`1.4:` Aus `A1` gleich "$o \in \mathsf{ran}\, R$" und
aus `A3` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in z \cap E) \Rightarrow (\alpha$_$R$_$o)$"
folgt via **35-1(Def)**: $o$ obere $R$_Schranke von $z \cap E$.

□

**64-22.** Als Spezialfall von **64-20** wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, dass, unter der Voraussetzung, dass $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, eine untere $M$_Schranke von $E$ auch eine untere $R$_Schranke von $E$ ist:

**64-22(Satz)**

*Es gelte:*

→) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

→) *$u$ untere $M$_Schranke von $E$.*

→) *$u \in z$.*

→) *$0 \neq E \subseteq z$.*

*Dann folgt "$u$ untere $R$_Schranke von $E$".*

Beweis **64-22**

1: Aus →) "$\ldots E \subseteq z$"
folgt via **2-10**: $z \cap E = E$.

2: Aus →) "$0 \neq E \ldots$" und
aus 1 "$z \cap E = E$"
folgt: $0 \neq z \cap E$.

3: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus →) "$u$ untere $M$_Schranke von $E$",
aus →) "$u \in z$" und
aus 2 "$0 \neq z \cap E$"
folgt via **64-20**: $u$ untere $R$_Schranke von $z \cap E$.

4: Aus 3 "$u$ untere $R$_Schranke von $z \cap E$" und
aus 1 "$z \cap E = E$"
folgt: $u$ untere $R$_Schranke von $E$.

□

**64-23.** Als Spezialfall von **64-21** wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, dass, unter der Voraussetzung, dass $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, eine obere $M$_Schranke von $E$ auch eine obere $R$_Schranke von $E$ ist:

**64-23(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$o$ obere $M$_Schranke von $E$.*

$\rightarrow$) *$o \in z$.*

$\rightarrow$) $0 \neq E \subseteq z$.

*Dann folgt "$o$ obere $R$_Schranke von $E$".*

Beweis **64-23**

1: Aus $\rightarrow$)"$\ldots E \subseteq z$"
folgt via **2-10**: $z \cap E = E$.

2: Aus $\rightarrow$)"$0 \neq E \ldots$" und
aus 1"$z \cap E = E$"
folgt: $0 \neq z \cap E$.

3: Aus $\rightarrow$)"$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus $\rightarrow$)"$o$ obere $M$_Schranke von $E$",
aus $\rightarrow$)"$o \in z$" und
aus 2"$0 \neq z \cap E$"
folgt via **64-21**: $o$ obere $R$_Schranke von $z \cap E$.

4: Aus 3"$o$ obere $R$_Schranke von $z \cap E$" und
aus 1"$z \cap E = E$"
folgt: $o$ obere $R$_Schranke von $E$.

□

**64-24.** Falls $u$ eine untere $R$_Schranke von $E$ ist - hier ist $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ -, dann ist $u$ auch eine untere $M$_Schranke von $E$ und $u$ und $E$ haben einige bemerkenswerte Eigenschaften, die aus $\mathsf{dom}\, R, \mathsf{ran}\, R \subseteq z$ und $\mathsf{dom}\, R, \mathsf{ran}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, M$ via **#35** deduziert werden:

**64-24(Satz)**

*Es gelte:*

→) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

→) *$u$ untere $R$_Schranke von $E$.*

*Dann folgt:*

a) $u \in z$.

b) $u \in \mathsf{dom}\, M$.

c) $E \subseteq z$.

d) $E \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

e) *$u$ untere $M$_Schranke von $E$.*

Beweis **64-24** `abcd)`

`1.1:` Aus →) "$u$ untere $R$_Schranke von $E$"
folgt via **35-1(Def)**: $u \in \mathsf{dom}\, R$.

`1.2:` Aus →) "$u$ untere $R$_Schranke von $E$"
folgt via **35-4**: $E \subseteq \mathsf{ran}\, R$.

`2.1:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-9**: $(\mathsf{dom}\, R \subseteq z) \wedge (\mathsf{ran}\, R \subseteq z)$.

`2.2:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-9**: $(\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, M) \wedge (\mathsf{ran}\, R \subseteq \mathsf{ran}\, M)$.

`3.a):` Aus `1.1` "$u \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `2.1` "$\mathsf{dom}\, R \subseteq z \ldots$"
folgt via **0-4**: $u \in z$.

`3.b):` Aus `1.1` "$u \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `2.2` "$\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, M \ldots$"
folgt via **0-4**: $u \in \mathsf{dom}\, M$.

`3.c):` Aus `1.2` "$E \subseteq \mathsf{ran}\, R$" und
aus `2.1` "$\ldots \mathsf{ran}\, R \subseteq z$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq z$.

`3.d):` Aus `1.2` "$E \subseteq \mathsf{ran}\, R$" und
aus `2.2` "$\ldots \mathsf{ran}\, R \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

`e)`

`1:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-3**: $R \subseteq M$.

`2:` Aus `1` "$R \subseteq M$" und
aus →) "$u$ untere $R$_Schranke von $E$"
folgt via **63-1**: $u$ untere $M$_Schranke von $E$.

□

**64-25.** Falls $o$ eine obere $R$_Schranke von $E$ ist - hier ist $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ -, dann ist $o$ auch eine obere $M$_Schranke von $E$ und $o$ und $E$ haben einige bemerkenswerte Eigenschaften, die aus $\mathsf{dom}\, R, \mathsf{ran}\, R \subseteq z$ und $\mathsf{dom}\, R, \mathsf{ran}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, M$ via **#35** deduziert werden:

**64-25(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$o$ obere $R$_Schranke von $E$.*

*Dann folgt:*

a) $o \in z$.

b) $o \in \mathsf{ran}\, M$.

c) $E \subseteq z$.

d) $E \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

e) *$o$ obere $M$_Schranke von $E$.*

<u>Beweis **64-25**</u> `abcd)`

`1.1:` Aus →) “$o$ obere $R$_Schranke von $E$”
folgt via **35-1(Def)**: $o \in \mathsf{ran}\, R$.

`1.2:` Aus →) “$o$ obere $R$_Schranke von $E$”
folgt via **35-5**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, R$.

`2.1:` Aus →) “$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$”
folgt via **64-9**: $(\mathsf{dom}\, R \subseteq z) \wedge (\mathsf{ran}\, R \subseteq z)$.

`2.2:` Aus →) “$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$”
folgt via **64-9**: $(\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, M) \wedge (\mathsf{ran}\, R \subseteq \mathsf{ran}\, M)$.

`3.a):` Aus `1.1`“$o \in \mathsf{ran}\, R$” und
aus `2.1`“$\ldots \mathsf{ran}\, R \subseteq z$”
folgt via **0-4**: $o \in z$.

`3.b):` Aus `1.1`“$o \in \mathsf{ran}\, R$” und
aus `2.2`“$\ldots \mathsf{ran}\, R \subseteq \mathsf{ran}\, M$”
folgt via **0-4**: $o \in \mathsf{ran}\, M$.

`3.c):` Aus `1.2`“$E \subseteq \mathsf{dom}\, R$” und
aus `2.1`“$\mathsf{dom}\, R \subseteq z \ldots$”
folgt via **0-6**: $E \subseteq z$.

`3.d):` Aus `1.2`“$E \subseteq \mathsf{dom}\, R$” und
aus `2.2`“$\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, M \ldots$”
folgt via **0-6**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

`e)`

`1:` Aus →) “$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$”
folgt via **64-3**: $R \subseteq M$.

`2:` Aus `1`“$R \subseteq M$” und
aus →) “$o$ obere $R$_Schranke von $E$”
folgt via **63-1**: $o$ obere $M$_Schranke von $E$.

□

**64-26.** Für jedes $M$_Infimum $inf$ von $E$ und jede untere $R$_Schranke $u$ von $E$ gilt, falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, $u\_M\_inf$:

**64-26(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$inf$ ist $M$_Infimum von $E$.*

$\rightarrow$) *$u$ untere $R$_Schranke von $E$.*

*Dann folgt "$u\_M\_inf$".*

Beweis **64-26**

1: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus $\rightarrow$) "$u$ untere $R$_Schranke von $E$"
folgt via **64-24**: $u$ untere $M$_Schranke von $E$.

2: Aus $\rightarrow$) "$inf$ ist $M$_Infimum von $E$" und
aus 1 "$u$ untere $M$_Schranke von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $u\_M\_inf$.

□

**64-27.** Für jedes $M$_Supremum $sup$ von $E$ und jede obere $R$_Schranke $o$ von $E$ gilt, falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, $sup$_$M$_$o$:

**64-27(Satz)**

*Es gelte:*

→) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

→) *$sup$ ist $M$_Supremum von $E$.*

→) *$o$ obere $R$_Schranke von $E$.*

*Dann folgt "$sup$_$M$_$o$".*

Beweis **64-27**

1: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus →) "$o$ obere $R$_Schranke von $E$"
folgt via **64-25**: $o$ obere $M$_Schranke von $E$.

2: Aus →) "$sup$ ist $M$_Supremum von $E$" und
aus 1 "$o$ obere $M$_Schranke von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $sup$_$M$_$o$.

□

**64-28.** Im Hinblick auf **64-26** erhebt sich die Frage, wann unter der Voraussetzung, dass $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, ein $M$_Infimum $inf$ von $E$ auch ein $R$_Infimum von $E$ ist. Die zwei alternativen Bedingungen konzentrieren sich um die Forderung, dass $inf$ eine untere $R$_Schranke von $E$ ist:

**64-28(Satz)**

*Es gelte:*

→) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

→) *$inf$ ist $M$_Infimum von $E$.*

→) *$inf$ untere $R$_Schranke von $E$.* *oder* *$(inf \in z) \wedge (0 \neq E \subseteq z)$.*

*Dann folgt "$inf$ ist $R$_Infimum von $E$".*

Beweis **64-28**

`1.1`: Nach "→) *oder*" gilt:
$(inf$ untere $R$_Schranke von $E) \vee ((inf \in z) \wedge (0 \neq E \subseteq z))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $inf$ untere $R$_Schranke von $E$.

`1.1.2.Fall` $(inf \in z) \wedge (0 \neq E \subseteq z)$.

`2`: Aus →)"$inf$ ist $M$_Infimum von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $inf$ untere $M$_Schranke von $E$.

`3`: Aus →)"$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus 2"$inf$ untere $M$_Schranke von $E$",
aus `1.1.2.Fall`"$inf \in z \ldots$" und
aus `1.1.2.Fall`"$\ldots 0 \neq E \subseteq z$"
folgt via **64-22**: $inf$ untere $R$_Schranke von $E$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` "$inf$ untere $R$_Schranke von $E$"

...

<u>Beweis **64-28**</u> ...

`1.2:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `A1` gleich "$inf$ untere $R$_Schranke von $E$"
folgt via **64-24**: `A2` "$inf \in z$"

`Thema1.3` $\alpha$ untere $R$_Schranke von $E$.

`2.1:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `Thema1.3` "$\alpha$ untere $R$_Schranke von $E$"
folgt via **64-24**: $\alpha \in z$.

`2.2:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus →) "$inf$ ist $M$_Infimum von $E$" und
aus `Thema1.3` "$\alpha$ untere $R$_Schranke von $E$"
folgt via **64-26**: $\alpha\_M\_inf$.

`3:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus `2.2` "$\alpha\_M\_inf$",
aus `2.1` "$\alpha \in z$" und
aus `A2` gleich "$inf \in z$"
folgt via **64-4**: $\alpha\_R\_inf$.

Ergo `Thema1.3`: `A3` "$\forall \alpha : (\alpha$ untere $R$_Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha\_R\_inf)$"

`1.4:` Aus `A1` gleich "$inf$ untere $R$_Schranke von $E$" und
aus `A3` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ untere $R$_Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha\_R\_inf)$"
folgt via **36-1(Def)**: $inf$ ist $R$_Infimum von $E$.

□

**64-29.** Im Hinblick auf **64-27** erhebt sich die Frage, wann unter der Voraussetzung, dass $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, ein $M$_Supremum $sup$ von $E$ auch ein $R$_Supremum von $E$ ist. Die zwei alternativen Bedingungen konzentrieren sich um die Forderung, dass $sup$ eine obere $R$_Schranke von $E$ ist:

**64-29(Satz)**

*Es gelte:*

→) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

→) *$sup$ ist $M$_Supremum von $E$.*

→) *$sup$ obere $R$_Schranke von $E$.*
*oder*
*$(sup \in z) \wedge (0 \neq E \subseteq z)$.*

*Dann folgt "$sup$ ist $R$_Supremum von $E$".*

Beweis **64-29**

`1.1:` Nach "→) *oder*" gilt:
$(sup$ obere $R$_Schranke von $E) \vee ((sup \in z) \wedge (0 \neq E \subseteq z))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $sup$ obere $R$_Schranke von $E$.

`1.1.2.Fall` $(sup \in z) \wedge (0 \neq E \subseteq z)$.

`2:` Aus →) "$sup$ ist $M$_Supremum von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $sup$ obere $M$_Schranke von $E$.

`3:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus 2 "$sup$ obere $M$_Schranke von $E$",
aus `1.1.2.Fall` "$sup \in z \ldots$" und
aus `1.1.2.Fall` "$\ldots 0 \neq E \subseteq z$"
folgt via **64-23**: $sup$ obere $R$_Schranke von $E$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

| `A1` | "$sup$ obere $R$_Schranke von $E$" |

...

Beweis **64-29** . . .

`1.2:` Aus →) “ $R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$ ” und
aus `A1` gleich “ $sup$ obere $R$_Schranke von $E$ ”
folgt via **64-25**: `A2` | “ $sup \in z$ ”

---

`Thema1.3` $\alpha$ obere $R$_Schranke von $E$.

`2.1:` Aus →) “ $R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$ ” und
aus `Thema1.3` “ $\alpha$ obere $R$_Schranke von $E$ ”
folgt via **64-25**: $\alpha \in z$.

`2.2:` Aus →) “ $R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$ ” ,
aus →) “ $sup$ ist $M$_Supremum von $E$ ” und
aus `Thema1.3` “ $\alpha$ obere $R$_Schranke von $E$ ”
folgt via **64-27**: $sup\_M\_\alpha$.

`3:` Aus →) “ $R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$ ” ,
aus `2.2` “ $\alpha\_M\_sup$ ” ,
aus `2.1` “ $\alpha \in z$ ” und
aus `A2` gleich “ $sup \in z$ ”
folgt via **64-4**: $sup\_R\_\alpha$.

---

Ergo `Thema1.3`: `A3` | “ $\forall \alpha : (\alpha$ obere $R$_Schranke von $E) \Rightarrow (sup\_R\_\alpha)$ ”

`1.4:` Aus `A1` gleich “ $sup$ obere $R$_Schranke von $E$ ” und
aus `A3` gleich “ $\forall \alpha : (\alpha$ obere $R$_Schranke von $E) \Rightarrow (sup\_R\_\alpha)$ ”
folgt via **36-1(Def)**: $sup$ ist $R$_Supremum von $E$.

□

**64-30.** Wenn $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und wenn $inf$ ein $R$_Infimum von $E$ ist, dann muss - nicht ganz unerwarteter Weise - Einiges zusätzlich gefordert werden, damit $inf$ auch ein $M$_Infimum von $E$ ist:

**64-30(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$inf$ ist $R$_Infimum von $E$.*

$\rightarrow$) $\forall\alpha : (\alpha$ *untere $M$_Schranke von $E$*$) \Rightarrow (\alpha \in z)$.

$\rightarrow$) $0 \neq E \subseteq z$.

*Dann folgt "$inf$ ist $M$_Infimum von $E$".*

<u>Beweis **64-30**</u>

1.1: Aus →) "$inf$ ist $R$_Infimum von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $inf$ untere $R$_Schranke von $E$.

2: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus 1 "$inf$ untere $R$_Schranke von $E$"
folgt via **64-24**: A1 | "$inf$ untere $M$_Schranke von $E$"

Thema1.2 — $\beta$ untere $M$_Schranke von $E$

2: Aus Thema1.2 "$\beta$ untere $M$_Schranke von $E$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha$ untere $M$_Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha \in z)$"
folgt: $\beta \in z$.

3: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus Thema1.2 "$\beta$ untere $M$_Schranke von $E$",
aus 3 "$\beta \in z$" und
aus →) "$0 \neq E \subseteq z$"
folgt via **64-22**: $\beta$ untere $R$_Schranke von $E$.

4: Aus →) "$inf$ ist $R$_Infimum von $E$" und
aus 3 "$\beta$ untere $R$_Schranke von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $\beta$_$R$_$inf$.

5: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus 4 "$\beta$_$R$_$inf$"
folgt via **64-4**: $\beta$_$M$_$inf$.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall \beta : (\beta$ untere $M$_Schranke von $E) \Rightarrow (\beta$_$M$_$inf)$"

1.3: Aus A1 gleich "$inf$ untere $M$_Schranke von $E$" und
aus A2 gleich "$\forall \beta : (\beta$ untere $M$_Schranke von $E) \Rightarrow (\beta$_$M$_$inf)$"
folgt via **36-1(Def)**: $inf$ ist $M$_Infimum von $E$.

□

**64-31.** Wenn $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und wenn *sup* ein $R$_Supremum von $E$ ist, dann muss - nicht ganz unerwarteter Weise - Einiges zusätzlich gefordert werden, damit *sup* auch ein $M$_Supremum von $E$ ist:

**64-31(Satz)**

*Es gelte:*

→) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

→) *sup ist $R$_Supremum von $E$.*

→) $\forall\alpha : (\alpha$ *obere $M$_Schranke von* $E) \Rightarrow (\alpha \in z)$.

→) $0 \neq E \subseteq z$.

*Dann folgt "sup ist $M$_Supremum von $E$".*

Beweis **64-31**

1.1: Aus →) "$sup$ ist $R$_Supremum von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $sup$ obere $R$_Schranke von $E$.

2: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus 1 "$sup$ obere $R$_Schranke von $E$"
folgt via **64-25**: A1 | "$sup$ obere $M$_Schranke von $E$"

Thema1.2 — $\beta$ obere $M$_Schranke von $E$

2: Aus Thema1.2 "$\beta$ obere $M$_Schranke von $E$" und
aus →) "$\forall\alpha : (\alpha$ obere $M$_Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha \in z)$"
folgt: $\beta \in z$.

3: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus Thema1.2 "$\beta$ obere $M$_Schranke von $E$",
aus 3 "$\beta \in z$" und
aus →) "$0 \neq E \subseteq z$"
folgt via **64-23**: $\beta$ obere $R$_Schranke von $E$.

4: Aus →) "$sup$ ist $R$_Supremum von $E$" und
aus 3 "$\beta$ obere $R$_Schranke von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $sup\_R\_\beta$.

5: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus 4 "$sup\_R\_\beta$"
folgt via **64-4**: $sup\_M\_\beta$.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall\beta : (\beta$ obere $M$_Schranke von $E) \Rightarrow (sup\_M\_\beta)$"

1.3: Aus A1 gleich "$sup$ obere $M$_Schranke von $E$" und
aus A2 gleich "$\forall\beta : (\beta$ obere $M$_Schranke von $E) \Rightarrow (sup\_M\_\beta)$"
folgt via **36-1(Def)**: $sup$ ist $M$_Supremum von $E$.

□

**64-32.** Falls *min* ein $M$_Minimum von $E$ ist, das in $\mathsf{dom}\, R$ liegt, dann ist, falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, *min* ein $R$_Minimum von $z \cap E$:

**64-32(Satz)**

*Es gelte:*

→) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

→) *min ist $M$_Minimum von $E$.*

→) $min \in \mathsf{dom}\, R$.

*Dann folgt "min ist $R$_Minimum von $z \cap E$".*

Beweis **64-32**

1: Aus →) "*min* ist $M$_Minimum von $E$"
folgt via **38-1(Def)**: ($min$ untere $M$_Schranke von $E$) $\wedge$ ($min \in E$).

2: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus 1 "*min* untere $M$_Schranke von $E$..." und
aus →) "$min \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **64-20**: *min* untere $R$_Schranke von $z \cap E$.

3: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus 2 "*min* untere $R$_Schranke von $z \cap E$"
folgt via **64-24**: $min \in z$.

4: Aus 3 "$min \in z$" und
aus 1 "...$min \in E$"
folgt via **2-2**: $min \in z \cap E$.

5: Aus 2 "*min* untere $R$_Schranke von $z \cap E$" und
aus 4 "$min \in z \cap E$"
folgt via **38-1(Def)**: *min* ist $R$_Minimum von $z \cap E$.

□

**64-33.** Falls $max$ ein $M$_Maximum von $E$ ist, das in $\mathsf{ran}\,R$ liegt, dann ist, falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, $max$ ein $R$_Maximum von $z \cap E$:

**64-33(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$max$ ist $M$_Maximum von $E$.*

$\rightarrow$) $max \in \mathsf{ran}\,R$.

*Dann folgt "$max$ ist $R$_Maximum von $z \cap E$".*

Beweis **64-33**

1: Aus $\rightarrow$) "$max$ ist $M$_Maximum von $E$"
folgt via **38-1(Def)**: $(max$ obere $M$_Schranke von $E) \wedge (max \in E)$.

2: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus 1 "$max$ obere $M$_Schranke von $E$ …" und
aus $\rightarrow$) "$max \in \mathsf{ran}\,R$"
folgt via **64-21**: $max$ obere $R$_Schranke von $z \cap E$.

3: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus 2 "$max$ obere $R$_Schranke von $z \cap E$"
folgt via **64-25**: $max \in z$.

4: Aus 3 "$max \in z$" und
aus 1 "… $max \in E$"
folgt via **2-2**: $max \in z \cap E$.

5: Aus 2 "$max$ obere $R$_Schranke von $z \cap E$" und
aus 4 "$max \in z \cap E$"
folgt via **38-1(Def)**: $max$ ist $R$_Maximum von $z \cap E$.

□

**64-34.** Falls $E$ eine TeilKlasse von $z$ ist und falls $min$ ein $M$_Minimum von $E$ ist, dann ist $min$ auch ein $R$_Minimum von $E$, sofern $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist:

**64-34(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow)$ *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow)$ *$min$ ist $M$_Minimum von $E$.*

$\rightarrow)$ *$E \subseteq z$.*

*Dann folgt "$min$ ist $R$_Minimum von $E$".*

Beweis **64-34**

1: Aus $\rightarrow)$ "$min$ ist $M$_Minimum von $E$"
folgt via **38-1(Def)**: $(min$ untere $M$_Schranke von $E) \wedge (min \in E)$.

2.1: Aus 1 "$\ldots min \in E$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E$.

2.2: Aus 1 "$\ldots min \in E$" und
aus $\rightarrow)$ "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $min \in z$.

3: Aus 2 "$0 \neq E$" und
aus $\rightarrow)$ "$E \subseteq z$"
folgt: $0 \neq E \subseteq z$.

4: Aus $\rightarrow)$ "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus 1 "$min$ untere $M$_Schranke von $E \ldots$",
aus 2.2 "$min \in z$" und
aus 3 "$0 \neq E \subseteq z$"
folgt via **64-22**: $min$ untere $R$_Schranke von $E$.

5: Aus 4 "$min$ untere $R$_Schranke von $E$" und
aus 1 "$\ldots min \in E$"
folgt via **38-1(Def)**: $min$ ist $R$_Minimum von $E$.

□

**64-35.** Falls $E$ eine TeilKlasse von $z$ ist und falls $max$ ein $M$_Maximum von $E$ ist, dann ist $max$ auch ein $R$_Maximum von $E$, sofern $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist:

**64-35(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$max$ ist $M$_Maximum von $E$.*

$\rightarrow$) *$E \subseteq z$.*

*Dann folgt "$max$ ist $R$_Maximum von $E$".*

Beweis **64-35**

1: Aus $\rightarrow$)"$max$ ist $M$_Maximum von $E$"
folgt via **38-1(Def)**: $(max$ obere $M$_Schranke von $E) \wedge (max \in E)$.

2.1: Aus 1"$\dots max \in E$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E$.

2.2: Aus 1"$\dots max \in E$" und
aus $\rightarrow$)"$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $max \in z$.

3: Aus 2"$0 \neq E$" und
aus $\rightarrow$)"$E \subseteq z$"
folgt: $0 \neq E \subseteq z$.

4: Aus $\rightarrow$)"$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus 1"$max$ obere $M$_Schranke von $E \dots$",
aus 2.2"$max \in z$" und
aus 3"$0 \neq E \subseteq z$"
folgt via **64-23**: $max$ obere $R$_Schranke von $E$.

5: Aus 4"$max$ obere $R$_Schranke von $E$" und
aus 1"$\dots max \in E$"
folgt via **38-1(Def)**: $max$ ist $R$_Maximum von $E$.

□

**64-36.** Falls $min$ ein $R$_Minimum von $E$ ist und falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, dann ist $min$ ein $M$_Minimum von $E$. Ähnliches gilt für $R$_Maxima:

**64-36(Satz)**

a) *Aus "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"*
*und "$min$ ist $R$_Minimum von $E$"*
*folgt "$min$ ist $M$_Minimum von $E$".*

b) *Aus "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$"*
*und "$max$ ist $R$_Maximum von $E$"*
*folgt "$max$ ist $M$_Maximum von $E$".*

Beweis **64-36** a)
VS gleich $(R$ ist $M$_induzierte Relation in $z) \wedge (min$ ist $R$_Minimum von $E)$.

1: Aus →) "$min$ ist $R$_Minimum von $E$"
folgt via **38-1(Def)**: $(min$ untere $R$_Schranke von $E) \wedge (min \in E)$.

2: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus 1 "$min$ untere $R$_Schranke von $E \ldots$"
folgt via **64-24**: $min$ untere $M$_Schranke von $E$.

3: Aus 2 "$min$ untere $M$_Schranke von $E$" und
aus 1 "$\ldots min \in E$"
folgt via **38-1(Def)**: $min$ ist $M$_Minimum von $E$.

b)
VS gleich $(R$ ist $M$_induzierte Relation in $z) \wedge (max$ ist $R$_Maximum von $E)$.

1: Aus →) "$max$ ist $R$_Maximum von $E$"
folgt via **38-1(Def)**: $(max$ obere $R$_Schranke von $E) \wedge (max \in E)$.

2: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus 1 "$max$ obere $R$_Schranke von $E \ldots$"
folgt via **64-25**: $max$ obere $M$_Schranke von $E$.

3: Aus 2 "$max$ obere $M$_Schranke von $E$" und
aus 1 "$\ldots max \in E$"
folgt via **38-1(Def)**: $max$ ist $M$_Maximum von $E$.

□

**64-37.** Falls $\mu in$ ein $M$_minimales Element von $E$ ist, das in $z$ ist, dann ist, wenn $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, $\mu in$ ein $R$_minimales Element von $z \cap E$:

**64-37(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$\mu in$ ist $M$_minimales Element von $E$.*

$\rightarrow$) *$\mu in \in z$.*

*Dann folgt "$\mu in$ ist $R$_minimales Element von $z \cap E$".*

<u>Beweis **64-37**</u>

`1.1:` Aus →) "$\mu in$ ist $M$_minimales Element von $E$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu in \in E$.

`2:` Aus →) "$\mu in \in z$" und
aus `1.1` "$\mu in \in E$"
folgt via **2-2**: `A1` | "$\mu in \in z \cap E$"

`Thema1.2` $(\alpha \in z \cap E) \wedge (\alpha\_R\_\mu in)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in z \cap E \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in z) \wedge (\alpha \in E)$.

`2.2:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `Thema1.2` "$\ldots \alpha\_R\_\mu in$"
folgt via **64-4**: $\alpha\_M\_\mu in$.

`3:` Aus →) "$\mu in$ ist $M$_minimales Element von $E$",
aus `2.1` "$\ldots \alpha \in E$" und
aus `2.2` "$\alpha\_M\_\mu in$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu in\_M\_\alpha$.

`4:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus `3` "$\mu in\_M\_\alpha$",
aus →) "$\mu in \in z$" und
aus `2.1` "$\alpha \in z \ldots$"
folgt via **64-4**: $\mu in\_R\_\alpha$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in z \cap E) \wedge (\alpha\_R\_\mu in)) \Rightarrow (\mu in\_R\_\alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mu in \in z \cap E$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in z \cap E) \wedge (\alpha\_R\_\mu in)) \Rightarrow (\mu in\_R\_\alpha)$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu in$ ist $R$_minimales Element von $z \cap E$.

□

**64-38.** Falls $\mu ax$ ein $M$_maximales Element von $E$ ist, das in $z$ ist, dann ist, wenn $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist, $\mu ax$ ein $R$_maximales Element von $z \cap E$:

**64-38(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$\mu ax$ ist $M$_maximales Element von $E$.*

$\rightarrow$) *$\mu ax \in z$.*

*Dann folgt "$\mu ax$ ist $R$_maximales Element von $z \cap E$".*

<u>Beweis **64-38**</u>

`1.1:` Aus →) "$\mu ax$ ist $M$_maximales Element von $E$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu ax \in E$.

`2:` Aus →) "$\mu ax \in z$" und
aus `1.1` "$\mu ax \in E$"
folgt via **2-2**: `A1` | "$\mu ax \in z \cap E$"

`Thema1.2` $(\alpha \in z \cap E) \wedge (\mu ax\_R\_\alpha)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in z \cap E \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in z) \wedge (\alpha \in E)$.

`2.2:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `Thema1.2` "$\ldots \mu ax\_R\_\alpha$"
folgt via **64-4**: $\mu ax\_M\_\alpha$.

`3:` Aus →) "$\mu ax$ ist $M$_maximales Element von $E$",
aus `2.1` "$\ldots \alpha \in E$" und
aus `2.2` "$\mu ax\_M\_\alpha$"
folgt via **39-1(Def)**: $\alpha\_M\_\mu ax$.

`4:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus `3` "$\alpha\_M\_\mu ax$",
aus `2.1` "$\alpha \in z \ldots$" und
aus →) "$\mu ax \in z$"
folgt via **64-4**: $\alpha\_R\_\mu ax$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in z \cap E) \wedge (\mu ax\_R\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_R\_\mu ax)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mu ax \in z \cap E$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in z \cap E) \wedge (\mu ax\_R\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_R\_\mu ax)$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu ax$ ist $R$_maximales Element von $z \cap E$.

□

**64-39.** Falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und falls $E \subseteq z$ gilt, dann ist $\mu in$ genau dann ein $M$_minimales Element von $E$, wenn $\mu in$ ein $R$_minimales Element von $E$ ist:

<u>**64-39(Satz)**</u>

*Unter den Voraussetzungen ...*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$E \subseteq z$.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *$\mu in$ ist $M$_minimales Element von $E$.*

`ii)` *$\mu in$ ist $R$_minimales Element von $E$.*

<u>Beweis **64-39**</u> `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $\mu in$ ist $M$_minimales Element von $E$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$E \subseteq z$"
folgt via **2-10**: $z \cap E = E$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\mu in$ ist $M$_minimales Element von $E$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu in \in E$.

`2:` Aus `1.2`"$\mu in \in E$" und
aus $\rightarrow$) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\mu in \in z$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus $\rightarrow$) "$\mu in$ ist $M$_minimales Element von $E$" und
aus `2`"$\mu in \in z$"
folgt via **64-37**: $\mu in$ ist $R$_minimales Element von $z \cap E$.

`4:` Aus `3`"$\mu in$ ist $R$_minimales Element von $z \cap E$" und
aus `1.1`"$z \cap E = E$"
folgt: $\mu in$ ist $R$_minimales Element von $E$.

Beweis **64-39** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\mu in$ ist $R$_minimales Element von $E$.

`1.1:` Aus →) "$\mu in$ ist $R$_minimales Element von $E$"
folgt via **39-1(Def)**: `A1` | "$\mu in \in E$"

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in E$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`2.2:` Aus `A1` gleich "$\mu in \in E$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\mu in \in z$.

`3:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha\_M\_\mu in$",
aus `2.1`"$\alpha \in z$" und
aus `2.2`"$\mu in \in z$"
folgt via **64-4**: $\alpha\_R\_\mu in$.

`4:` Aus →) "$\mu in$ ist $R$_minimales Element von $E$",
aus `Thema1.2`"$\alpha \in E \ldots$" und
aus `3`"$\alpha\_R\_\mu in$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu in\_R\_\alpha$.

`5:` Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus `4`"$\mu in\_R\_\alpha$"
folgt via **64-4**: $\mu in\_M\_\alpha$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)) \Rightarrow (\mu in\_M\_\alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mu in \in E$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_M\_\mu in)) \Rightarrow (\mu in\_M\_\alpha)$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu in$ ist $M$_minimales Element von $E$.

□

**64-40.** Falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ ist und falls $E \subseteq z$ gilt, dann ist $\mu ax$ genau dann ein $M$_maximales Element von $E$, wenn $\mu ax$ ein $R$_maximales Element von $E$ ist:

**64-40(Satz)**

*Unter den Voraussetzungen …*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$E \subseteq z$.*

*… sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *$\mu ax$ ist $M$_maximales Element von $E$.*

`ii)` *$\mu ax$ ist $R$_maximales Element von $E$.*

Beweis **64-40** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\mu ax$ ist $M$_maximales Element von $E$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$E \subseteq z$"
folgt via **2-10**: $z \cap E = E$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\mu ax$ ist $M$_maximales Element von $E$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu ax \in E$.

`2:` Aus `1.2`"$\mu ax \in E$" und
aus $\rightarrow$) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\mu ax \in z$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus $\rightarrow$) "$\mu ax$ ist $M$_maximales Element von $E$" und
aus `2`"$\mu ax \in z$"
folgt via **64-38**: $\mu ax$ ist $R$_maximales Element von $z \cap E$.

`4:` Aus `3`"$\mu ax$ ist $R$_maximales Element von $z \cap E$" und
aus `1.1`"$z \cap E = E$"
folgt: $\mu ax$ ist $R$_maximales Element von $E$.

Beweis **64-40** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich "$\mu ax$ ist $R$_maximales Element von $E$"

1.1: Aus →) "$\mu ax$ ist $R$_maximales Element von $E$"
folgt via **39-1(Def)**: A1 | "$\mu ax \in E$"

$\boxed{\text{Thema1.2}}$ $(\alpha \in E) \wedge (\mu ax\_M\_\alpha)$.

2.1: Aus Thema1.2 "$\alpha \in E$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

2.2: Aus A1 gleich "$\mu ax \in E$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\mu ax \in z$.

3: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$",
aus Thema1.2 "$\ldots \mu ax\_M\_\alpha$",
aus 2.2 "$\mu ax \in z$" und
aus 2.1 "$\alpha \in z$"
folgt via **64-4**: $\mu ax\_R\_\alpha$.

4: Aus →) "$\mu ax$ ist $R$_maximales Element von $E$",
aus Thema1.2 "$\alpha \in E \ldots$" und
aus 3 "$\mu ax\_R\_\alpha$"
folgt via **39-1(Def)**: $\alpha\_R\_\mu ax$.

5: Aus →) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus 4 "$\alpha\_R\_\mu ax$"
folgt via **64-4**: $\alpha\_M\_\mu ax$.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\mu ax\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\mu ax)$"

1.3: Aus A1 gleich "$\mu ax \in E$" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\mu ax\_M\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_M\_\mu ax)$"
folgt via **39-1(Def)**: $\mu ax$ ist $M$_maximales Element von $E$.

□

$r$ Relation: $r$_induzierte Relation in $z$.
$r$ Relation in $x$: $r$_induzierte Relation in $z$.
$M$ antiSymmetrisch: $M$_induzierte Relation in $z$.

**Ersterstellung: 28/05/07** **Letzte Änderung: 27/05/11**

**65-1.** Unter der Voraussetzung, dass $R$ die $r$_induzierte Relation in $\mathcal{U}$ ist, ist $r$ genau dann eine Relation, wenn $r = R$:

**65-1(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow)$ *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $\mathcal{U}$.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *$r$ Relation.*

`ii)` *$R = r$.*

Beweis **65-1** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $r$ Relation.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$r$ Relation"
folgt via **10-1(Def)**: $r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$"$R$ ist $r$_induzierte Relation in $\mathcal{U}$"
folgt via **64-1(Def)**: $R = r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1.1`"$r \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **2-10**: $r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = r$.

`3:` Aus `1.2`"$R = r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$" und
aus `2`"$r \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = r$"
folgt: $R = r$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $R = r$.

`1:` Aus $\rightarrow)$"$R$ ist $r$_induzierte Relation in $\mathcal{U}$"
folgt via **64-3**: $R$ Relation in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$R$ Relation in $\mathcal{U}$"
folgt via **10-14**: $R$ Relation.

`3:` Aus `2`"$R$ Relation" und
aus `VS` gleich "$R = r$"
folgt: $r$ Relation.

□

**65-2.** Falls $r$ eine Relation ist und $R$ die $r$_induzierte Relation in $z$ ist und $\mathsf{dom}\, r \subseteq z$ und $\mathsf{ran}\, r \subseteq z$ gilt, so folgt $R = r$:

<u>**65-2(Satz)**</u>

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation.*

$\rightarrow$) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, r \subseteq z$.

$\rightarrow$) $\mathsf{ran}\, r \subseteq z$.

*Dann folgt "$R = r$".*

<u>Beweis **65-2**</u>

1: Aus $\rightarrow$) "$r$ Relation"
folgt via **10-4**: $r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$.

2: Aus $\rightarrow$) "$\mathsf{dom}\, r \subseteq z$" und
aus $\rightarrow$) "$\mathsf{ran}\, r \subseteq z$"
folgt via **6-7**: $(\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r) \subseteq z \times z$.

3: Aus 1"$r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$" und
aus 2"$(\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r) \subseteq z \times z$"
folgt via **0-6**: $r \subseteq z \times z$.

4: Aus 3"$r \subseteq z \times z$"
folgt via **2-10**: $r \cap (z \times z) = r$.

5: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-1(Def)**: $R = r \cap (z \times z)$.

6: Aus 5"$R = r \cap (z \times z)$" und
aus 4"$r \cap (z \times z) = r$"
folgt: $R = r$.

□

**65-3.** Durch Spezialisierung von **65-2** auf *Relationen in $x$* ergibt sich die folgende Aussage:

<u>**65-3(Satz)**</u>

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow$) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) $x \subseteq z$.

*Dann folgt “$R = r$”.*

<u>Beweis **65-3**</u>

1: Aus $\rightarrow$)“$r$ Relation in $x$”
folgt via **10-17**: $(r \text{ Relation}) \wedge (\mathsf{dom}\, r \subseteq x) \wedge (\mathsf{ran}\, r \subseteq x)$.

2.1: Aus 1“$\ldots \mathsf{dom}\, r \subseteq x \ldots$” und
aus $\rightarrow$)“$x \subseteq z$”
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq z$.

2.2: Aus 1“$\ldots \mathsf{ran}\, r \subseteq x$” und
aus $\rightarrow$)“$x \subseteq z$”
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\, r \subseteq z$.

3: Aus 1“$r$ Relation$\ldots$”,
aus $\rightarrow$)“$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$”,
aus 2.1“$\mathsf{dom}\, r \subseteq z$” und
aus 2.2“$\mathsf{ran}\, r \subseteq z$”
folgt via **65-2**: $R = r$.

□

**65-4.** Falls $r$ eine Relation in $x$ ist, so ist die $r$_induzierte Relation $R$ in $z$ eine Relation in $z \cap x$ und gleichzeitig die $r$_induzierte Relation in $z \cap x$:

**65-4(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow$) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

*Dann folgt:*

a) *$R$ Relation in $z \cap x$.*

b) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z \cap x$.*

Beweis **65-4** a)

1: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **64-3**: $(R \text{ Relation in } z) \wedge (R \subseteq r)$.

2: Aus $\rightarrow$) "$r$ Relation in $x$" und
aus 1 "$R \subseteq r$"
folgt via **10-20**: $R$ Relation in $x$.

3.a): Aus 1 "$R$ Relation in $z \ldots$" und
aus 2 "$R$ Relation in $x$"
folgt via **10-16**: $R$ Relation in $z \cap x$.

3.b): Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$" und
aus 2 "$R$ Relation in $x$"
folgt via **64-3**: $R$ ist $r$_induzierte Relation in $z \cap x$.

$\square$

**65-5.** Falls $R$ die $r$_induzierte Relation in $z$ einer Relation $r$ in $x$ ist, dann ist jede $R$_Kette eine TeilKlasse von $z$ und eine TeilKlasse von $x$:

**65-5(Satz)**

*Es gelte:*

→) *$r$ Relation in $x$.*

→) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

→) *$K$ ist $R$_Kette.*

*Dann folgt:*

a) $K \subseteq z$.

b) $K \subseteq x$.

Beweis **65-5**

1: Aus →) "$r$ Relation in $x$" und
aus →) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **65-4**: $R$ Relation in $z \cap x$.

2: Aus 1 "$R$ Relation in $z \cap x$" und
aus →) "$K$ ist $R$_Kette"
folgt via **34-4**: $K \subseteq z \cap x$.

3.a): Aus 2 "$K \subseteq z \cap x$"
folgt via **2-9**: $K \subseteq z$.

3.b): Aus 2 "$K \subseteq z \cap x$"
folgt via **2-9**: $K \subseteq x$.

□

**65-6.** Falls $R$ die $r$_induzierte Relation in $z$ einer Relation $r$ in $x$ ist, dann ist jede $R$_Schranke von $E$ ein Element von $z \cap x$ und jede Klasse $E$, zu der es eine $R$_Schranke gibt, ist eine TeilKlasse von $z \cap x$:

**65-6(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow$) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$p$ untere $R$_Schranke von $E$.* *oder* *$p$ obere $R$_Schranke von $E$.*

*Dann folgt:*

a) $p \in z \cap x$.

b) $E \subseteq z \cap x$.

Beweis **65-6**

1: Aus $\rightarrow$) "$r$ Relation in $x$" und
aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **65-4**: $R$ Relation in $z \cap x$.

2.a): Aus 1 "$R$ Relation in $z \cap x$" und
aus "$\rightarrow$) *oder*" ($p$ untere $R$_Schranke von $E$) $\vee$ ($p$ obere $R$_Schranke von $E$)
folgt via **37-1**: $p \in z \cap x$.

2.b): Aus 1 "$R$ Relation in $z \cap x$" und
aus "$\rightarrow$) *oder*" ($p$ untere $R$_Schranke von $E$) $\vee$ ($p$ obere $R$_Schranke von $E$)
folgt via **37-1**: $E \subseteq z \cap x$.

$\square$

**65-7.** Falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ einer antiSymmetrischen Klasse $M$ ist, dann hat jede Klasse $E$ höchstens ein $R$_Infimum:

**65-7(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$M$ antiSymmetrisch.*

$\rightarrow$) *$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$inf$ ist $R$_Infimum von $E$.*

$\rightarrow$) *$j$ ist $R$_Infimum von $E$.*

*Dann folgt "$inf = j$".*

Beweis **65-7**

1: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus $\rightarrow$) "$M$ antiSymmetrisch"
folgt via **64-10**: $R$ antiSymmetrisch.

2: Aus 1 "$R$ antiSymmetrisch",
aus $\rightarrow$) "$inf$ ist $R$_Infimum von $E$" und
aus $\rightarrow$) "$j$ ist $R$_Infimum von $E$"
folgt via **46-2**: $inf = j$.

□

**65-8.** Falls $R$ die $M$_induzierte Relation in $z$ einer antiSymmetrischen Klasse $M$ ist, dann hat jede Klasse $E$ höchstens ein $R$_Supremum:

**65-8(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) $M$ *antiSymmetrisch.*

$\rightarrow$) $R$ *ist* $M$*_induzierte Relation in* $z$.

$\rightarrow$) *sup ist* $R$*_Supremum von* $E$.

$\rightarrow$) $s$ *ist* $R$*_Supremum von* $E$.

*Dann folgt "sup* $= s$*".*

Beweis **65-8**

1: Aus $\rightarrow$)"$R$ ist $M$_induzierte Relation in $z$" und
aus $\rightarrow$)"$M$ antiSymmetrisch"
folgt via **64-10**: $R$ antiSymmetrisch.

2: Aus 1"$R$ antiSymmetrisch",
aus $\rightarrow$)"$sup$ ist $R$_Supremum von $E$" und
aus $\rightarrow$)"$s$ ist $R$_Supremum von $E$"
folgt via **46-3**: $sup = s$.

□

$r$ Relation in $x$ *und* $r$ reflexiv in $x$: $r$_induzierte Relation in $z$.

**Ersterstellung: 26/05/07** **Letzte Änderung: 27/05/11**

**66-1.** Falls $R$ die $r$_induzierte Relation in $z$ einer reflexiven Relation $r$ in $x$ ist, dann ist $R$ reflexive Relation in $z \cap x$ und $\mathsf{dom}\, R = \mathsf{ran}\, R = z \cap x$:

**66-1(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow$) *$r$ reflexiv in $x$.*

$\rightarrow$) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

*Dann folgt:*

a) *$R$ Relation in $z \cap x$.*

b) *$R$ reflexiv in $z \cap x$.*

c) *$\mathsf{dom}\, R = z \cap x$.*

d) *$\mathsf{ran}\, R = z \cap x$.*

Beweis **66-1**

`1.a)`: Aus $\rightarrow$) "$r$ Relation in $x$" und
aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **65-4**: $R$ Relation in $z \cap x$.

`1.b)`: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$" und
aus $\rightarrow$) "$r$ reflexiv in $x$"
folgt via **64-10**: $R$ reflexiv in $z \cap x$.

`2.c)`: Aus `1.a)` "$R$ Relation in $z \cap x$" und
aus `1.b)` "$R$ reflexiv in $z \cap x$"
folgt via **34-6**: $\mathsf{dom}\, R = z \cap x$.

`2.d)`: Aus `1.a)` "$R$ Relation in $z \cap x$" und
aus `1.b)` "$R$ reflexiv in $z \cap x$"
folgt via **34-6**: $\mathsf{ran}\, R = z \cap x$.

□

**66-2.** Falls $R$ die $r$_induzierte Relation in $z$ einer reflexiven Relation $r$ in $x$ ist, dann ist jede untere $r$_Schranke von $E$, die in $z$ ist, untere $R$_Schranke von $z \cap E$:

**66-2(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow\!)$ *$r$ reflexiv in $x$.*

$\rightarrow\!)$ *$R$ ist r_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow\!)$ *$u$ untere r_Schranke von $E$.*

$\rightarrow\!)$ *$u \in z$.*

*Dann folgt "$u$ untere R_Schranke von $z \cap E$".*

Beweis **66-2**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$r$ Relation in $x$",
aus $\rightarrow\!)$ "$r$ reflexiv in $x$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **66-1**: $\mathsf{dom}\, R = z \cap x$.

3: Aus 1 "$r$ Relation in $x \ldots$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$u$ untere $r$_Schranke von $E$"
folgt via **37-1**: $u \in x$.

4: Aus $\rightarrow\!)$ "$u \in z$" und
aus 3 "$u \in x$"
folgt via **2-2**: $u \in z \cap x$.

5: Aus 4 "$u \in z \cap x$" und
aus 2 "$\mathsf{dom}\, R = z \cap x$"
folgt: $u \in \mathsf{dom}\, R$.

6: Aus $\rightarrow\!)$ "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$",
aus $\rightarrow\!)$ "$u$ untere $r$_Schranke von $E$" und
aus 4 "$u \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **64-20**: $u$ untere $R$_Schranke von $z \cap E$.

□

**66-3.** Falls $R$ die $r$_induzierte Relation in $z$ einer reflexiven Relation $r$ in $x$ ist, dann ist jede obere $r$_Schranke von $E$, die in $z$ ist, obere $R$_Schranke von $z \cap E$:

**66-3(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow$) *$r$ reflexiv in $x$.*

$\rightarrow$) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$o$ obere $r$_Schranke von $E$.*

$\rightarrow$) *$o \in z$.*

*Dann folgt "$o$ obere $R$_Schranke von $z \cap E$".*

Beweis **66-3**

1: Aus $\rightarrow$) "$r$ Relation in $x$",
aus $\rightarrow$) "$r$ reflexiv in $x$" und
aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **66-1**: $\mathsf{ran}\, R = z \cap x$.

3: Aus 1"$r$ Relation in $x \ldots$" und
aus $\rightarrow$) "$o$ obere $r$_Schranke von $x$"
folgt via **37-1**: $o \in x$.

4: Aus $\rightarrow$) "$o \in z$" und
aus 3"$o \in x$"
folgt via **2-2**: $o \in z \cap x$.

5: Aus 4"$o \in z \cap x$" und
aus 2"$\mathsf{ran}\, R = z \cap x$"
folgt: $o \in \mathsf{ran}\, R$.

6: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$",
aus $\rightarrow$) "$o$ obere $r$_Schranke von $E$" und
aus 4"$o \in \mathsf{ran}\, R$"
folgt via **64-14**: $o$ obere $R$_Schranke von $z \cap E$.

□

**66-4.** In Spezialisierung von **66-2** wird nun gezeigt: Falls $R$ die $r$_induzierte Relation in $z$ einer reflexiven Relation $r$ in $x$ ist, dann ist jede untere $r$_Schranke von $E$ die in $z$ ist, unter der Voraussetzung, dass $E$ eine TeilKlasse von $z$ ist, eine untere $R$_Schranke von $E$:

**66-4(Satz)**

*Es gelte:*

→) *$r$ Relation in $x$.*

→) *$r$ reflexiv in $x$.*

→) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

→) *$u$ untere $r$_Schranke von $E$.*

→) *$u \in z$.*

→) *$E \subseteq z$.*

*Dann folgt "$u$ untere $R$_Schranke von $E$".*

Beweis **66-4**

1: Aus →) "$r$ Relation in $x$",
aus →) "$r$ reflexiv in $x$",
aus →) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$",
aus →) "$u$ untere $r$_Schranke von $E$" und
aus →) "$u \in z$"
folgt via **66-2**: $u$ untere $R$_Schranke von $z \cap E$.

2: Aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **2-10**: $z \cap E = E$.

3: Aus 1 "$u$ untere $R$_Schranke von $z \cap E$" und
aus 2 "$z \cap E = E$"
folgt: $u$ untere $R$_Schranke von $E$.

□

**66-5.** In Spezialisierung von **66-3** wird nun gezeigt: Falls $R$ die $r$_induzierte Relation in $z$ einer reflexiven Relation $r$ in $x$ ist, dann ist jede obere $r$_Schranke von $E$ die in $z$ ist, unter der Voraussetzung, dass $E$ eine TeilKlasse von $z$ ist, eine obere $R$_Schranke von $E$:

**66-5(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow$) *$r$ reflexiv in $x$.*

$\rightarrow$) *$R$ ist r_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$o$ obere r_Schranke von $E$.*

$\rightarrow$) *$o \in z$.*

$\rightarrow$) *$E \subseteq z$.*

*Dann folgt "$o$ obere R_Schranke von $E$".*

Beweis **66-5**

1: Aus $\rightarrow$) "$r$ Relation in $x$",
aus $\rightarrow$) "$r$ reflexiv in $x$",
aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$",
aus $\rightarrow$) "$o$ obere $r$_Schranke von $E$" und
aus $\rightarrow$) "$o \in z$"
folgt via **66-3**: $o$ obere $R$_Schranke von $z \cap E$.

2: Aus $\rightarrow$) "$E \subseteq z$"
folgt via **2-10**: $z \cap E = E$.

3: Aus 1"$o$ obere $R$_Schranke von $z \cap E$" und
aus 2"$z \cap E = E$"
folgt: $o$ obere $R$_Schranke von $E$.

□

**66-6.** Nun wird **66-4** auf die leere Menge angewendet. Wegen des stets gültigen "$0 \subseteq z$" reduzieren sich die Voraussetzungen:

**66-6(Satz)**

*Es gelte:*

→) *$r$ Relation in $x$.*

→) *$r$ reflexiv in $x$.*

→) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

→) *$u$ untere $r$_Schranke von $0$.*

→) *$u \in z$.*

*Dann folgt "$u$ untere $R$_Schranke von $0$".*

Beweis **66-6**

1: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq z$.

2: Aus →) "$r$ Relation in $x$",
aus →) "$r$ reflexiv in $x$",
aus →) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$",
aus →) "$u$ untere $r$_Schranke von $0$",
aus →) "$u \in z$" und
aus 1 "$0 \subseteq z$"
folgt via **66-4**: $u$ untere $R$_Schranke von $0$.

□

**66-7.** Nun wird **66-5** auf die leere Menge angewendet. Wegen des stets gültigen "$0 \subseteq z$" reduzieren sich die Voraussetzungen:

**66-7(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow$) *$r$ reflexiv in $x$.*

$\rightarrow$) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$o$ obere $r$_Schranke von $0$.*

$\rightarrow$) *$o \in z$.*

*Dann folgt "$o$ obere $R$_Schranke von $0$".*

Beweis **66-7**

1: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq z$.

2: Aus $\rightarrow$) "$r$ Relation in $x$",
aus $\rightarrow$) "$r$ reflexiv in $x$",
aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$",
aus $\rightarrow$) "$o$ obere $r$_Schranke von $0$",
aus $\rightarrow$) "$o \in z$" und
aus 1 "$0 \subseteq z$"
folgt via **66-5**: $o$ obere $R$_Schranke von $0$.

□

**66-8.** Obwohl sich der folgende Satz als Spezialfall von **66-10** heraus stellt, wird er in die Essays aufgenommen. Dies geschieht, um die Beweisführung von **66-10** möglichst einfach zu gestalten.
Hier wird nachgewiesen: Falls $R$ die $r$_induzierte Relation in $z$ einer reflexiven Relation $r$ in $x$ ist, dann ist jedes $r$_Infimum der leeren Menge, das in $z$ ist, ein $R$_Infimum von 0:

**66-8(Satz)**

*Es gelte:*

→) *$r$ Relation in $x$.*

→) *$r$ reflexiv in $x$.*

→) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

→) *$inf$ ist $r$_Infimum von $0$.*

→) *$inf \in z$.*

*Dann folgt "$inf$ ist $R$_Infimum von $0$".*

Beweis **66-8**

`1.1:` Aus →) "$inf$ ist $r$_Infimum von 0"
folgt via **36-1(Def)**: $inf$ untere $r$_Schranke von 0.

`2:` Aus →) "$r$ Relation in $x$",
aus →) "$r$ reflexiv in $x$",
aus →) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$" und
aus `1.1` "$inf$ untere $r$_Schranke von 0" und
aus →) "$inf \in z$"
folgt via **66-6**: `A1` | "$inf$ untere $R$_Schranke von 0"

`Thema1.2` $\alpha$ untere $R$_Schranke von 0.

`2.1:` Aus →) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$" und
aus `Thema1.2` "$\alpha$ untere $R$_Schranke von 0"
folgt via **64-24**: $\alpha$ untere $r$_Schranke von 0.

`2.2:` Aus →) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$" und
aus `Thema1.2` "$\alpha$ untere $R$_Schranke von 0"
folgt via **64-24**: $\alpha \in z$.

`3:` Aus →) "$inf$ ist $r$_Infimum von 0" und
aus `2.1` "$\alpha$ untere $r$_Schranke von 0"
folgt via **36-1(Def)**: $\alpha$_$r$_$inf$.

`4:` Aus →) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$",
aus `3` "$\alpha$_$r$_$inf$",
aus `2.2` "$\alpha \in z$" und
aus →) "$inf \in z$"
folgt via **64-4**: $\alpha$_$R$_$inf$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha$ untere $R$_Schranke von 0$) \Rightarrow (\alpha$_$R$_$inf)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$inf$ untere $R$_Schranke von 0" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ untere $R$_Schranke von 0$) \Rightarrow (\alpha$_$R$_$inf)$"
folgt via **36-1(Def)**: $inf$ ist $R$_Infimum von 0.

□

**66-9.** Obwohl sich der folgende Satz als Spezialfall von **66-11** heraus stellt, wird er in die Essays aufgenommen. Dies geschieht, um die Beweisführung von **66-11** möglichst esupach zu gestalten.
Hier wird nachgewiesen: Falls $R$ die $r$_induzierte Relation in $z$ einer reflexiven Relation $r$ in $x$ ist, dann ist jedes $r$_Supremum der leeren Menge, das in $z$ ist, ein $R$_Supremum von 0:

**66-9(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow$) *$r$ reflexiv in $x$.*

$\rightarrow$) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *sup ist $r$_Supremum von 0.*

$\rightarrow$) *sup $\in z$.*

*Dann folgt "sup ist $R$_Supremum von 0".*

<u>Beweis **66-9**</u>

`1.1:` Aus →) "$sup$ ist $r$_Supremum von $0$"
folgt via **36-1(Def)**: $sup$ obere $r$_Schranke von $0$.

`2:` Aus →) "$r$ Relation in $x$",
aus →) "$r$ reflexiv in $x$",
aus →) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$" und
aus `1.1` "$sup$ obere $r$_Schranke von $0$" und
aus →) "$sup \in z$"
folgt via **66-7**: `A1` | "$sup$ obere $R$_Schranke von $0$"

`Thema1.2` $\alpha$ obere $R$_Schranke von $0$.

`2.1:` Aus →) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$" und
aus `Thema1.2` "$\alpha$ obere $R$_Schranke von $0$"
folgt via **64-25**: $\alpha$ obere $r$_Schranke von $0$.

`2.2:` Aus →) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$" und
aus `Thema1.2` "$\alpha$ obere $R$_Schranke von $0$"
folgt via **64-25**: $\alpha \in z$.

`3:` Aus →) "$sup$ ist $r$_Supremum von $0$" und
aus `2.1` "$\alpha$ obere $r$_Schranke von $0$"
folgt via **36-1(Def)**: $sup\_r\_\alpha$.

`4:` Aus →) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$",
aus `3` "$sup\_r\_\alpha$",
aus →) "$sup \in z$" und
aus `2.2` "$\alpha \in z$"
folgt via **64-4**: $sup\_R\_\alpha$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha$ obere $R$_Schranke von $0) \Rightarrow (sup\_R\_\alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$sup$ obere $R$_Schranke von $0$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ obere $R$_Schranke von $0) \Rightarrow (sup\_R\_\alpha)$"
folgt via **36-1(Def)**: $sup$ ist $R$_Supremum von $0$.

□

**66-10.** Unter kanonisch erscheinenden Zusatzvoraussetzungen folgt aus der Tatsache, dass $inf$ ein $r$_Infimum von $E$ ist, dass $inf$ auch ein $R$_Infimum von $E$ ist - alles unter der Voraussetzung, dass $r$ eine reflexive Relation in $x$ ist und dass $R$ die $r$_relative Relation in $z$ ist:

**66-10(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow$) *$r$ reflexiv in $x$.*

$\rightarrow$) *$R$ ist r_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$inf$ ist r_Infimum von $E$.*

$\rightarrow$) *$inf \in z$.*

$\rightarrow$) *$E \subseteq z$.*

*Dann folgt "$inf$ ist R_Infimum von $E$".*

Beweis **66-10**

`1:` Es gilt: $(0 \neq E) \vee (E = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq E$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$0 \neq E$” und
aus →) “$E \subseteq z$”
folgt: $0 \neq E \subseteq z$.

`3:` Aus →) “$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$” ,
aus →) “$inf$ ist $r$_Infimum von $E$” ,
aus →) “$inf \in z$” und
aus `2`“$0 \neq E \subseteq z$”
folgt via **64-28**: $inf$ ist $R$_Infimum von $E$.

`1.2.Fall` $E = 0$.

`2:` Aus →) “$inf$ ist $r$_Infimum von $E$” und
aus `1.2.Fall`“$E = 0$”
folgt: $inf$ ist $r$_Infimum von $0$.

`3:` Aus →) “$r$ Relation in $x$” ,
aus →) “$r$ reflexiv in $x$” ,
aus →) “$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$” ,
aus `2`“$inf$ ist $r$_Infimum von $0$” und
aus →) “$inf \in z$”
folgt via **66-8**: $inf$ ist $R$_Infimum von $0$.

`4:` Aus `3`“$inf$ ist $R$_Infimum von $0$” und
aus `1.2.Fall`“$E = 0$”
folgt: $inf$ ist $R$_Infimum von $E$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$inf$ ist $R$_Infimum von $E$.

□

**66-11.** Unter kanonisch erscheinenden Zusatzvoraussetzungen folgt aus der Tatsache, dass *sup* ein $r$_Supremum von $E$ ist, dass *sup* auch ein $R$_Supremum von $E$ ist - alles unter der Voraussetzung, dass $r$ eine reflexive Relation in $x$ ist und dass $R$ die $r$_relative Relation in $z$ ist:

**66-11(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow$) *$r$ reflexiv in $x$.*

$\rightarrow$) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *sup ist $r$_Supremum von $E$.*

$\rightarrow$) *$sup \in z$.*

$\rightarrow$) *$E \subseteq z$.*

*Dann folgt "sup ist $R$_Supremum von $E$".*

<u>Beweis **66-11**</u>

`1:` Es gilt: $(0 \neq E) \vee (E = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq E$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$0 \neq E$” und
aus →) “$E \subseteq z$”
folgt: $0 \neq E \subseteq z$.

`3:` Aus →) “$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$”,
aus →) “$sup$ ist $r$_Supremum von $E$”,
aus →) “$sup \in z$” und
aus `2`“$0 \neq E \subseteq z$”
folgt via **64-29**: $sup$ ist $R$_Supremum von $E$.

`1.2.Fall` $E = 0$.

`2:` Aus →) “$sup$ ist $r$_Supremum von $E$” und
aus `1.2.Fall`“$E = 0$”
folgt: $sup$ ist $r$_Supremum von $0$.

`3:` Aus →) “$r$ Relation in $x$”,
aus →) “$r$ reflexiv in $x$”,
aus →) “$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$”,
aus `2`“$sup$ ist $r$_Supremum von $0$” und
aus →) “$sup \in z$”
folgt via **66-9**: $sup$ ist $R$_Supremum von $0$.

`4:` Aus `3`“$sup$ ist $R$_Supremum von $0$” und
aus `1.2.Fall`“$E = 0$”
folgt: $sup$ ist $R$_Supremum von $E$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$sup$ ist $R$_Supremum von $E$.

□

**66-12.** Falls $R$ die $r$_induzierte Relation in $z$ ist und falls $r$ eine reflexive Relation in $x$ ist, dann ist jedes $r$_Minimum von $E$, das in $z$ ist, ein $R$_Minimum von $z \cap E$:

**66-12(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow$) *$r$ reflexiv in $x$.*

$\rightarrow$) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$min$ ist $r$_Minimum von $E$.*

$\rightarrow$) *$min \in z$.*

*Dann folgt "$min$ ist $R$_Minimum von $z \cap E$".*

Beweis **66-12**

1: Aus $\rightarrow$) "$r$ Relation in $x$" und
aus $\rightarrow$) "$min$ ist $r$_Minimum von $E$"
folgt via **38-24**: $min \in x$.

2.1: Aus $\rightarrow$) "$min \in z$" und
aus 1 "$min \in x$"
folgt via **2-2**: $min \in z \cap x$.

2.2: Aus $\rightarrow$) "$r$ Relation in $x$",
aus $\rightarrow$) "$r$ reflexiv in $x$" und
aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **66-1**: $\mathsf{dom}\, R = z \cap x$.

3: Aus 2.1 "$min \in z \cap x$" und
aus 2.2 "$\mathsf{dom}\, R = z \cap x$"
folgt: $min \in \mathsf{dom}\, R$.

4: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$",
aus $\rightarrow$) "$min$ ist $r$_Minimum von $E$" und
aus 3 "$min \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **64-32**: $min$ ist $R$_Minimum von $z \cap E$.

□

**66-13.** Falls $R$ die $r$_induzierte Relation in $z$ ist und falls $r$ eine reflexive Relation in $x$ ist, dann ist jedes $r$_Maximum von $E$, das in $z$ ist, ein $R$_Maximum von $z \cap E$:

**66-13(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$r$ Relation in $x$.*

$\rightarrow$) *$r$ reflexiv in $x$.*

$\rightarrow$) *$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$.*

$\rightarrow$) *$max$ ist $r$_Maximum von $E$.*

$\rightarrow$) *$max \in z$.*

*Dann folgt "$max$ ist $R$_Maximum von $z \cap E$".*

Beweis **66-13**

1: Aus $\rightarrow$) "$r$ Relation in $x$" und
aus $\rightarrow$) "$max$ ist $r$_Maximum von $E$"
folgt via **38-24**: $max \in x$.

2.1: Aus $\rightarrow$) "$max \in z$" und
aus 1 "$max \in x$"
folgt via **2-2**: $max \in z \cap x$.

2.2: Aus $\rightarrow$) "$r$ Relation in $x$",
aus $\rightarrow$) "$r$ reflexiv in $x$" und
aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$"
folgt via **66-1**: $\mathsf{ran}\, R = z \cap x$.

3: Aus 2.1 "$max \in z \cap x$" und
aus 2.2 "$\mathsf{ran}\, R = z \cap x$"
folgt: $max \in \mathsf{ran}\, R$.

4: Aus $\rightarrow$) "$R$ ist $r$_induzierte Relation in $z$",
aus $\rightarrow$) "$max$ ist $r$_Maximum von $E$" und
aus 3 "$max \in \mathsf{ran}\, R$"
folgt via **64-33**: $max$ ist $R$_Maximum von $z \cap E$.

$\square$

$\preceq$ Halbordnung in $x$: $\preceq$ _induzierte Relation in $z$.
$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in $x$: $\preceq$ _induzierte Relation in $z$.

**Ersterstellung: 01/06/07** **Letzte Änderung: 27/05/11**

**67-1.** Falls $\preceq$ Halbordnung in $x$ ist, dann ist die $\preceq$ _induzierte Relation in $z$ eine Halbordnung in $z \cap x$:

**67-1(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow)$ $\preceq$ *Halbordnung in* $x$.

$\rightarrow)$ $\trianglelefteq$ *ist* $\preceq$ *_induzierte Relation in* $z$.

*Dann folgt "*$\trianglelefteq$ *Halbordnung in* $z \cap x$*".*

Beweis **67-1**

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "$\preceq$ Halbordnung in $x$"
folgt via **34-12**: $\preceq$ Relation in $x$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$ "$\preceq$ Halbordnung in $x$"
folgt via **34-12**: $\preceq$ reflexiv in $x$.

`1.3:` Aus $\rightarrow)$ "$\preceq$ Halbordnung in $x$"
folgt via **34-12**: $\preceq$ transitiv in $x$.

`2.1:` Aus `1.1` "$\preceq$ Relation in $x$",
aus `1.2` "$\preceq$ reflexiv in $x$" und
aus $\rightarrow)$ "$\trianglelefteq$ ist $\preceq$ _induzierte Relation in $z$"
folgt via **66-1**: ($\trianglelefteq$ Relation in $z \cap x$) $\wedge$ ($\trianglelefteq$ reflexiv in $z \cap x$).

`2.2:` Aus $\rightarrow)$ "$\trianglelefteq$ ist $\preceq$ _induzierte Relation in $z$" und
aus `1.3` "$\preceq$ transitiv in $x$"
folgt via **64-10**: $\trianglelefteq$ transitiv in $z \cap x$.

`3:` Aus `2.1` "$\trianglelefteq$ Relation in $z \cap x \ldots$",
aus `2.1` "$\ldots \trianglelefteq$ reflexiv in $z \cap x$" und
aus `2.2` "$\trianglelefteq$ transitiv in $z \cap x$"
folgt via **34-12**: $\trianglelefteq$ Halbordnung in $z \cap x$.

$\square$

**67-2.** Falls $\preceq$ Halbordnung in $x$ ist, dann ist die $\preceq$ _induzierte Relation in $z$ in jenen Fällen, in denen $z$ eine TeilKlasse von $x$ ist, eine Halbordnung in $z$:

**67-2(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) $\preceq$ *Halbordnung in* $x$.

$\rightarrow$) $\trianglelefteq$ *ist* $\preceq$ *_induzierte Relation in* $z$.

$\rightarrow$) $z \subseteq x$.

*Dann folgt "*$\trianglelefteq$ *Halbordnung in* $z$*".*

Beweis **67-2** `abc)`

`1:` Aus $\rightarrow$)"$\preceq$ Halbordnung in $x$" und
aus $\rightarrow$)"$\trianglelefteq$ ist $\preceq$ _induzierte Relation in $z$"
folgt via **67-1**: $\trianglelefteq$ Halbordnung in $z \cap x$.

`2:` Aus $\rightarrow$)"$z \subseteq x$"
folgt via **2-10**: $z \cap x = z$.

`3:` Aus `1`"$\trianglelefteq$ Halbordnung in $z \cap x$" und
aus `2`"$z \cap x = z$"
folgt: $\trianglelefteq$ Halbordnung in $z$.

□

**67-3.** Falls $\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in $x$ ist, dann ist die $\preceq$ _induzierte Relation in $z$ eine antiSymmetrische Halbordnung in $z \cap x$:

**67-3(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* $x$.

$\rightarrow$) $\trianglelefteq$ *ist* $\preceq$ _*induzierte Relation in* $z$.

*Dann folgt "*$\trianglelefteq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* $z \cap x$*".*

Beweis **67-3**

1: Aus $\rightarrow$)"$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in $x$"
folgt via **34-13**: ($\preceq$ Halbordnung in $x$) $\wedge$ ($\preceq$ antiSymmetrisch).

2.1: Aus 1"$\preceq$ Halbordnung in $x$ ..." und
aus $\rightarrow$)"$\trianglelefteq$ ist $\preceq$ _induzierte Relation in $z$"
folgt via **67-1**: $\trianglelefteq$ Halbordnung in $z \cap x$.

2.2: Aus $\rightarrow$)"$\trianglelefteq$ ist $\preceq$ _induzierte Relation in $z$" und
aus 1"... $\preceq$ antiSymmetrisch"
folgt via **64-10**: $\trianglelefteq$ antiSymmetrisch.

3: Aus 2.1"$\trianglelefteq$ Halbordnung in $z \cap x$" und
aus 2.2"$\trianglelefteq$ antiSymmetrisch"
folgt via **34-13**: $\trianglelefteq$ antiSymmetrische Halbordnung in $z \cap x$.

□

**67-4.** Falls $\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in $x$ ist, dann ist die $\preceq$ _induzierte Relation in $z$ in jenen Fällen, in denen $z$ eine TeilKlasse von $x$ ist, eine antiSymmetrische Halbordnung in $z$:

**67-4(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow)$ $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* $x$.

$\rightarrow)$ $\trianglelefteq$ *ist* $\preceq$ *_induzierte Relation in* $z$.

$\rightarrow)$ $z \subseteq x$.

*Dann folgt "*$\trianglelefteq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* $z$*".*

Beweis **67-4**

1: Aus $\rightarrow)$ "$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in $x$" und
aus $\rightarrow)$ "$\trianglelefteq$ ist $\preceq$ _induzierte Relation in $z$"
folgt via **67-3**: $\trianglelefteq$ antiSymmetrische Halbordnung in $z \cap x$.

2: Aus $\rightarrow)$ "$z \subseteq x$"
folgt via **2-10**: $z \cap x = z$.

3: Aus 1 "$\trianglelefteq$ antiSymmetrische Halbordnung in $z \cap x$" und
aus 2 "$z \cap x = z$"
folgt: $\trianglelefteq$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$.

$\square$

**67-5.** Die $\preceq$ -induzierte Relation in einem $\preceq$ -Intervall $I$ ist, wenn $\preceq$ eine Halbordnung in $x$ ist, eine Halbordnung in $I$:

**67-5(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow)$ $\preceq$ *Halbordnung in* $x$.

$\rightarrow)$ $\trianglelefteq$ *ist* $\preceq$ *-induzierte Relation in* $I$.

$\rightarrow)$ $I$ *ist* $\preceq$ *-Intervall.*

*Dann folgt "*$\trianglelefteq$ *Halbordnung in* $I$*".*

Beweis **67-5**

1: Aus 1"$\preceq$ Halbordnung in $x$"
folgt via **34-12**: $\preceq$ Relation in $x$.

2: Aus 1"$\preceq$ Relation in $x$" und
aus $\rightarrow)$"$I$ ist $\preceq$ -Intervall"
folgt via **42-2**: $I \subseteq x$.

3: Aus 1"$\preceq$ Halbordnung in $x$",
aus $\rightarrow)$"$\trianglelefteq$ ist $\preceq$ -induzierte Relation in $I$" und
aus 2"$I \subseteq x$"
folgt via **67-2**: $\trianglelefteq$ Halbordnung in $I$.

$\square$

**67-6.** Die $\preceq$ -induzierte Relation in einem $\preceq$ -Intervall $I$ ist, wenn $\preceq$ eine antiSymmetrische Halbordnung in $x$ ist, eine antiSymmetrische Halbordnung in $I$:

**67-6(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) $\preceq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* $x$.

$\rightarrow$) $\trianglelefteq$ *ist* $\preceq$ *-induzierte Relation in* $I$.

$\rightarrow$) $I$ *ist* $\preceq$ *-Intervall.*

*Dann folgt "*$\trianglelefteq$ *antiSymmetrische Halbordnung in* $I$*".*

Beweis **67-6**

1: Aus 1"$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in $x$"
folgt via **34-13**: $\preceq$ Relation in $x$.

2: Aus 1"$\preceq$ Relation in $x$" und
aus $\rightarrow$)"$I$ ist $\preceq$ -Intervall"
folgt via **42-2**: $I \subseteq x$.

3: Aus 1"$\preceq$ antiSymmetrische Halbordnung in $x$",
aus $\rightarrow$)"$\trianglelefteq$ ist $\preceq$ -induzierte Relation in $I$" und
aus 2"$I \subseteq x$"
folgt via **67-4**: $\trianglelefteq$ antiSymmetrische Halbordnung in $I$.

$\square$

**InklusionsRelation in $z$.**

*sse* InklusionsRelation in $z$: $\overset{\mathbf{ir}}{sse}$.

*sse*_Intervalle.

**Ersterstellung: 01/06/07** **Letzte Änderung: 02/06/11**

**68-1.** Die **InklusionsRelation in** $z$ ist die $\mathsf{sse}$_induzierte Relation in $z$:

**68-1(Definition)**

"$\mathfrak{C}$ **InklusionsRelation in** $z$" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} \text{ ist } \mathsf{sse}\text{\_induzierte Relation in } z.$$

**68-2.** Es werden einige erwarteten Aussagen über die InklusionsRelation in $z$ aufgelistet. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c) - d) - e) - f)`:

**68-2(Satz)**

`a)` $\mathsf{sse} \cap (z \times z)$ *InklusionsRelation in* $z$.

`b)` "$\mathfrak{C}$ *InklusionsRelation in* $z$" *genau dann, wenn* "$\mathfrak{C} = \mathsf{sse} \cap (z \times z)$".

`c)` *Aus* "$\mathfrak{C}$ *InklusionsRelation in* $z$" *und* "$\mathfrak{D}$ *InklusionsRelation in* $z$" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

`d)` $\mathsf{sse}$ *InklusionsRelation in* $\mathcal{U}$.

`e)` "$\mathfrak{C}$ *InklusionsRelation in* $\mathcal{U}$" *genau dann, wenn* "$\mathfrak{C}$ *universelle InklusionsRelation*".

`f)` "*sse InklusionsRelation in* $\mathcal{U}$" *genau dann, wenn* "*sse* $= \mathsf{sse}$".

Beweis **68-2** `b)`

`1:` $\mathfrak{C}$ InklusionsRelation in $z$
$\overset{68-1(\mathrm{Def})}{\Leftrightarrow}$ $\mathfrak{C}$ ist sse_induzierte Relation in $z$
$\overset{64-1(\mathrm{Def})}{\Leftrightarrow}$ $\mathfrak{C} = \mathsf{sse} \cap (z \times z)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\mathfrak{C}$ InklusionsRelation in $z) \Leftrightarrow (\mathfrak{C} = \mathsf{sse} \cap (z \times z)$.

`a)`

Aus "$\mathsf{sse} \cap (z \times z) = \mathsf{sse} \cap (z \times z)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{sse} \cap (z \times z)$ InklusionsRelation in $z$.

`c)` `VS` gleich $(\mathfrak{C}$ InklusionsRelation in $z) \wedge (\mathfrak{D}$ InklusionsRelation in $z)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ InklusionsRelation in $z\ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathfrak{C} = \mathsf{sse} \cap (z \times z)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\mathfrak{D}$ InklusionsRelation in $z$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathfrak{D} = \mathsf{sse} \cap (z \times z)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

Beweis **68-2** `d)`

`1:` Via **61-3** gilt: $\mathsf{sse}$ Relation.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{sse}$ Relation”
folgt via **10-1(Def)**: $\mathsf{sse} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{sse} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$”
folgt via **2-10**: $\mathsf{sse} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = \mathsf{sse}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{sse} = \mathsf{sse} = \mathsf{sse} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`5:` Aus `4`“$\mathsf{sse} = \mathsf{sse} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{sse}$ InklusionsRelation in $\mathcal{U}$.

`e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathfrak{C}$ InklusionsRelation in $\mathcal{U}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{sse}$ InklusionsRelation in $\mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ InklusionsRelation in $\mathcal{U}$” und
aus `1`“$\mathsf{sse}$ InklusionsRelation in $\mathcal{U}$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathfrak{C} = \mathsf{sse}$.

`3:` Via **61-2** gilt: $\mathsf{sse}$ universelle InklusionsRelation.

`4:` Aus `2`“$\mathfrak{C} = \mathsf{sse}$” und
aus `3`“$\mathsf{sse}$ universelle InklusionsRelation”
folgt: $\mathfrak{C}$ universelle InklusionsRelation.

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\mathfrak{C}$ universelle InklusionsRelation.

`1:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ universelle InklusionsRelation”
folgt via **61-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{sse}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{sse}$ InklusionsRelation in $\mathcal{U}$.

`3:` Aus `1`“$\mathfrak{C} = \mathsf{sse}$” und
aus `2`“$\mathsf{sse}$ InklusionsRelation in $\mathcal{U}$”
folgt: $\mathfrak{C}$ InklusionsRelation in $\mathcal{U}$.

`f)`

`1:`
$$sse \text{ InklusionsRelation in } \mathcal{U} \overset{\mathtt{e)}}{\Leftrightarrow} sse \text{ universelle InklusionsRelation} \overset{\mathbf{61-1(Def)}}{\Leftrightarrow} sse = \mathsf{sse}.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $(sse \text{ InklusionsRelation in } \mathcal{U}) \Leftrightarrow (sse = \mathsf{sse})$.

□

**68-3.** Mit der folgenden Aussage wird Einiges über die Elemente der Inklusions-Relation in $z$ gesagt:

**68-3(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in* $z$.

$\rightarrow$) $w \in sse$.

*Dann gibt es* $\Omega, \Psi$*, so dass gilt:*

e.1) $\Omega \in z$.

e.2) $\Psi \in z$.

e.3) $\Omega \subseteq \Psi$.

e.4) $w = (\Omega, \Psi)$.

Beweis **68-3**

---

**sse-Notation.**

---

1: Aus →) “$sse$ InklusionsRelation in $z$”
folgt via **68-2**: $sse = \mathsf{sse} \cap (z \times z)$.

2: Aus →) “$w \in sse$” und
aus 1 “$sse = \mathsf{sse} \cap (z \times z)$”
folgt: $w \in \mathsf{sse} \cap (z \times z)$.

3: Aus 2 “$w \in \mathsf{sse} \cap (z \times z)$”
folgt via **2-2**: $(w \in \mathsf{sse}) \wedge (w \in z \times z)$.

4: Aus 3 “$\ldots w \in z \times z$”
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in z) \wedge (\Psi \in z) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

5: Aus 4 “$\ldots w = (\Omega, \Psi)$” und
aus 3 “$w \in \mathsf{sse} \ldots$”
folgt: $(\Omega, \Psi) \in \mathsf{sse}$.

6: Aus 5 “$(\Omega, \Psi) \in \mathsf{sse}$”
folgt: $\Omega \; \mathsf{sse} \; \Psi$.

7: Aus 6 “$\Omega \; \mathsf{sse} \; \Psi$”
folgt via **61-4**: $\Omega \subseteq \Psi$.

8: Aus 4 “$\exists \Omega, \Psi \ldots$”,
aus 4 “$\ldots \Omega \in z \ldots$”,
aus 4 “$\ldots \Psi \in z \ldots$”,
aus 7 “$\Omega \subseteq \Psi$” und
aus 4 “$\ldots w = (\Omega, \Psi)$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi$:

$$(\Omega \in z) \wedge (\Psi \in z) \wedge (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

□

**68-4.** Es folgt ein Kriterium für $p\_sse\_q$, wenn $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist:

**68-4(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in z.*

*... sind die Aussagen* i), ii), iii) *äquivalent:*

i) $p\_sse\_q$.

ii) "$p$ sse $q$" *und* "$p \in z$" *und* "$q \in z$".

iii) "$p \subseteq q$" *und* "$p \in z$" *und* "$q \in z$".

---

sse-**Notation**.

Beweis **68-4** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $p\_sse\_q$.

1: Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-1(Def)**: *sse* ist sse_induzierte Relation in $z$.

2: Aus 1 "*sse* ist sse_induzierte Relation in $z$" und
aus VS gleich "$p\_sse\_q$"
folgt via **64-4**: $(p \,\mathsf{sse}\, q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(p \,\mathsf{sse}\, q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

1: Aus VS gleich "$p \,\mathsf{sse}\, q \ldots$"
folgt via **61-4**: $p \subseteq q$.

2: aus 1 "$p \subseteq q$",
aus VS gleich "$\ldots p \in z \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots q \in z$"
folgt: $(p \subseteq q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(p \subseteq q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots q \in z$"
folgt via **ElementAxiom**: $q$ Menge.

2: Aus 1.1 "$q$ Menge" und
aus VS gleich "$p \subseteq q$"
folgt via **61-4**: $p \,\mathsf{sse}\, q$.

3: Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-1(Def)**: *sse* ist sse_induzierte Relation in $z$.

4: Aus 3 "*sse* ist sse_induzierte Relation in $z$",
aus 2 "$p \,\mathsf{sse}\, q$",
aus VS gleich "$\ldots p \in z \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots q \in z$"
folgt via **64-4**: $p\_sse\_q$.

□

**68-5.** Nun wird ein Kriterium für "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_q$" gegeben, falls $sse$ die Inklusions-Relation in $z$ ist:

> **<u>68-5(Satz)</u>**
>
> *Unter der Vorausstzung ...*
>
> $\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in z.*
>
> *... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*
>
> `i)` $p\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_q$.
>
> `ii)` "$p \subset q$" *und* "$p \in z$" *und* "$q \in z$".

Beweis **68-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich $p\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_q$.

1: Aus VS gleich "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_q$"
folgt via **41-3**: $(p\_sse\_q) \wedge (p \neq q)$.

2: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus 1 "$p\_sse\_q \ldots$"
folgt via **68-4**: $(p \subseteq q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

3: Aus 2 "$p \subseteq q \ldots$" und
aus 1 "$\ldots p \neq q$"
folgt via **57-1(Def)**: $p \subset q$.

4: Aus 3 "$p \subset q$",
aus 2 "$\ldots p \in z \ldots$" und
aus 2 "$\ldots q \in z$"
folgt: $(p \subset q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $(p \subset q) \wedge (p \in z) \wedge (q \in z)$.

1: Aus VS gleich "$p \subset q \ldots$"
folgt via **57-1(Def)**: $(p \subseteq q) \wedge (p \neq q)$.

2: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus 1 "$p \subseteq q \ldots$",
aus VS gleich "$\ldots p \in z \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots q \in z$"
folgt via **68-4**: $p\_sse\_q$.

3: Aus 2 "$p\_sse\_q$" und
aus 1 "$\ldots p \neq q$"
folgt via **41-3**: $p\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_q$.

□

**68-6.** Nun wird unter anderem fest gestellt, dass die InklusionsRelation in $z$ eine antiSymmetrische Halbordnung in $z$ ist:

**68-6(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in $z$.*

*Dann folgt:*

a) *sse antiSymmetrische Halbordnung in $z$.*

b) *sse reflexiv in $z$.*

c) *sse transitiv.*

d) *sse antiSymmetrisch.*

e) $\mathsf{dom}\,(sse) = z$.

f) $\mathsf{ran}\,(sse) = z$.

<u>Beweis **68-6**</u>

`1.1`: Via **61-8** gilt: $\mathsf{sse}$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathcal{U}$.

`1.2`: Via **0-18** gilt: $z \subseteq \mathcal{U}$.

`1.3`: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-1(Def)**: $sse$ ist $\mathsf{sse\_induzierte}$ Relation in $z$.

`2.a)`: Aus `1.1` "$\mathsf{sse}$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathcal{U}$",
aus `1.3` "$sse$ ist $\mathsf{sse\_induzierte}$ Relation in $z$" und
aus `1.2` "$z \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **67-4**: $sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$.

`3.b)`: Aus `2.a)` "$sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-13**: $sse$ reflexiv in $x$.

`3.c)`: Aus `2.a)` "$sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-13**: $sse$ transitiv.

`3.d)`: Aus `2.a)` "$sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-13**: $sse$ antiSymmetrisch.

`3.e)`: Aus `2.a)` "$sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-14**: $\mathsf{dom}\,(sse) = z$.

`3.f)`: Aus `2.a)` "$sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-14**: $\mathsf{ran}\,(sse) = z$.

□

**68-7.** Die InklusionsRelation in $z$ ist genau dann eine Menge, wenn $z$ eine Menge ist:

**68-7(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in $z$.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalen:*

`i)` *sse Menge.*

`ii)` *$z$ Menge.*

Beweis **68-7**

`1:` Aus $\rightarrow$) "*sse* InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: *sse* antiSymmetrische Halbordnung in $z$.

`2:` Aus `1`"*sse* antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-13**: (*sse* Relation in $z$) $\wedge$ (*sse* reflexiv in $z$).

`3:` Aus `2`"*sse* Relation in $z$ ..." und
aus `2`"... *sse* reflexiv in $z$"
folgt via **34-7**: (*sse* Menge) $\Leftrightarrow$ ($z$ Menge).

$\square$

**68-8.** Die InklusionsRelation in $z$ ist genau dann eine Unmenge, wenn $z$ eine Unmenge ist:

**68-8(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in z.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalen:*

`i)` *sse Unmenge.*

`ii)` *z Unmenge.*

Beweis **68-8**

`1:` Aus $\rightarrow$)"$sse$ InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: $sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$.

`2:` Aus `1`"$sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-13**: ($sse$ Relation in $z$) $\wedge$ ($sse$ reflexiv in $z$).

`3:` Aus `2`"$sse$ Relation in $z$ ..." und
aus `2`"... $sse$ reflexiv in $z$"
folgt via **34-8**: ($sse$ Unmenge) $\Leftrightarrow$ ($z$ Unmenge).

$\square$

**68-9.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist und falls $p$ eine $sse$_Schranke von $E$ ist, dann gilt $p \in z$ und $E \subseteq z$:

**68-9(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

$\rightarrow$) *$p$ untere $sse$_Schranke von $E$.* ——— *oder* *$p$ obere $sse$_Schranke von $E$.*

*Dann folgt:*

a) $p \in z$.

b) $E \subseteq z$.

Beweis **68-9**

1: Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: $sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$.

2: Aus 1 "$sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-13**: $sse$ Relation in $z$.

3: Aus 2 "$sse$ Relation in $z$" und
aus "$\rightarrow$) *oder*" $(p$ untere $sse$_Schranke von $E)$
$\vee(p$ obere $sse$_Schranke von $E)$
folgt via **37-1**: $(p \in z) \wedge (E \subseteq z)$.

4.a): Aus 3
folgt: $p \in z$.

4.b): Aus 3
folgt: $E \subseteq z$.

□

**68-10.** Nun wird eine Charakterisierung unterer $sse$_Schranken von $E$ gegeben, wenn $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist:

**68-10(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *$u$ untere $sse$_Schranke von $E$.*

`ii)` "$u \in z$" *und* "$E \subseteq z$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha)$".

`iii)` "$u \in z$" *und* "$E \subseteq z$" *und* "$u \subseteq \bigcap E$".

Beweis **68-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $u$ untere $sse$_Schranke von $E$.

`1.1:` Aus →)“$sse$ InklusionsRelation in $z$” und
aus `VS` gleich “$u$ untere $sse$_Schranke von $E$”
folgt via **68-9**: `A1` | “$(u \in z) \wedge (E \subseteq z)$”

> `Thema1.2` $\alpha \in E$.
>
> `2:` Aus `VS` gleich “$u$ untere $sse$_Schranke von $E$” und
> aus `Thema1.2`“$\alpha \in E$”
> folgt via **35-1(Def)**: $u\_sse\_\alpha$.
>
> `3:` Aus →)“$sse$ InklusionsRelation in $z$” und
> aus 2“$u\_sse\_\alpha$”
> folgt via **68-4**: $u \subseteq \alpha$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | “$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$u \in z \ldots$”,
aus `A1` gleich “$\ldots E \subseteq z$” und
aus `A2` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha)$”
folgt: $(u \in z) \wedge (E \subseteq z) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha))$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(u \in z) \wedge (E \subseteq z) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha))$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha)$”
folgt via **1-15**: $u \subseteq \bigcap E$.

`2:` Aus `VS` gleich “$u \in z \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots E \subseteq z \ldots$” und
aus 1“$u \subseteq \bigcap E$”
folgt: $(u \in z) \wedge (E \subseteq z) \wedge (u \subseteq \bigcap E)$.

Beweis **68-10** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(u \in z) \wedge (E \subseteq z) \wedge (u \subseteq \bigcap E)$.

1.1: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: $\mathsf{dom}\,(sse) = z$.

2: Aus VS gleich "$u \in z \ldots$" und
aus 1.1 "$\mathsf{dom}\,(sse) = z$"
folgt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"} u \in \mathsf{dom}\,(sse) \text{"}}$

---

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\beta \in E$.

2: Aus Thema1.2 "$\beta \in E$"
folgt via **1-15**: $\bigcap E \subseteq \beta$.

3: Aus VS gleich "$\ldots u \subseteq \bigcap E$" und
aus 2 "$\bigcap E \subseteq \beta$"
folgt via **0-6**: $u \subseteq \beta$.

4: Aus Thema1.2 "$\beta \in E$" und
aus VS gleich "$\ldots E \subseteq z \ldots$"
folgt via **0-4**: $\beta \in z$.

5: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus 3 "$u \subseteq \beta$",
aus VS gleich "$u \in z \ldots$" und
aus 4 "$\beta \in z$"
folgt via **68-4**: $u\_sse\_\beta$.

---

Ergo Thema1.2: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"} \forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (u\_sse\_\beta) \text{"}}$

1.3: Aus A1 gleich "$u \in \mathsf{dom}\,(sse)$" und
aus A2 gleich "$\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (u\_sse\_\beta)$"
folgt via **35-1(Def)**: $u$ untere $sse$_Schranke von $E$.

□

**68-11.** Nun wird eine Charakterisierung oberer *sse*_Schranken von $E$ gegeben, wenn *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist:

**68-11(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in z.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` *o obere sse_Schranke von E.*

`ii)` "$o \in z$" *und* "$E \subseteq z$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o)$".

`iii)` "$o \in z$" *und* "$E \subseteq z$" *und* "$\bigcup E \subseteq o$".

Beweis **68-11** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $o$ obere *sse*_Schranke von $E$.

1.1: Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus VS gleich "$o$ obere *sse*_Schranke von $E$"
folgt via **68-9**: A1 | "$(o \in z) \wedge (E \subseteq z)$"

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in E$.
>
> 2: Aus VS gleich "$o$ obere *sse*_Schranke von $E$" und
> aus Thema1.2 "$\alpha \in E$"
> folgt via **35-1(Def)**: $\alpha\_sse\_o$.
>
> 3: Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
> aus 2 "$\alpha\_sse\_o$"
> folgt via **68-4**: $\alpha \subseteq o$.

Ergo Thema1.2: A2 | "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o)$"

1.3: Aus A1 gleich "$o \in z \ldots$",
aus A1 gleich "$\ldots E \subseteq z$" und
aus A2 gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o)$"
folgt: $(o \in z) \wedge (E \subseteq z) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o))$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(o \in z) \wedge (E \subseteq z) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o))$.

1: Aus VS gleich "$\ldots\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o)$"
folgt via **1-15**: $\bigcup E \subseteq o$.

2: Aus VS gleich "$o \in z \ldots$",
aus VS gleich "$\ldots E \subseteq z \ldots$" und
aus 1 "$\bigcup E \subseteq o$"
folgt: $(o \in z) \wedge (E \subseteq z) \wedge (\bigcup E \subseteq o)$.

Beweis **68-11** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(o \in z) \wedge (E \subseteq z) \wedge (\bigcup E \subseteq o)$.

1.1: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: $\mathsf{ran}\,(sse) = z$.

2: Aus VS gleich "$o \in z \ldots$" und
aus 1.1 "$\mathsf{ran}\,(sse) = z$"
folgt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}o \in \mathsf{ran}\,(sse)\text{"}}$

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\beta \in E$.
>
> 2: Aus Thema1.2 "$\beta \in E$"
> folgt via **1-15**: $\beta \subseteq \bigcup E$.
>
> 3: Aus 2 "$\beta \subseteq \bigcup E$" und
> aus VS gleich "$\ldots \bigcup E \subseteq o$"
> folgt via **0-6**: $\beta \subseteq o$.
>
> 4: Aus Thema1.2 "$\beta \in E$" und
> aus VS gleich "$\ldots E \subseteq z \ldots$"
> folgt via **0-4**: $\beta \in z$.
>
> 5: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
> aus 3 "$\beta \subseteq o$",
> aus 4 "$\beta \in z$" und
> aus VS gleich "$o \in z \ldots$"
> folgt via **68-4**: $\beta\_sse\_o$.

Ergo Thema1.2: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta\_sse\_o)\text{"}}$

1.3: Aus A1 gleich "$o \in \mathsf{ran}\,(sse)$" und
aus A2 gleich "$\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta\_sse\_o)$"
folgt via **35-1(Def)**: $o$ obere $sse$_Schranke von $E$.

□

**68-12.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist, dann ist folgendes Kriterium für $sse$_Infima verfügbar:

**68-12(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in z.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *$inf$ ist sse_Infimum von E.*

`ii)` *"$inf$ untere sse_Schranke von E"*
*und "$\forall\alpha : (\alpha$ untere sse_Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha \subseteq inf)$".*

Beweis **68-12** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $inf$ ist $sse$_Infimum von $E$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$inf$ ist $sse$_Infimum von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: `A1` | "$inf$ untere $sse$_Schranke von $E$"

`Thema1.2` $\alpha$ untere $sse$_Schranke von $E$.

`2:` Aus `VS` gleich "$inf$ ist $sse$_Infimum von $E$" und
aus `Thema1.2` "$\alpha$ untere $sse$_Schranke von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $\alpha$_$sse$_$inf$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus 2 "$\alpha$_$sse$_$inf$"
folgt via **68-4**: $\alpha \subseteq inf$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall\alpha : (\alpha$ untere $sse$_Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha \subseteq inf)$"

`1.3:` Aus `A1` und
aus `A2`
folgt: ($inf$ untere $sse$_Schranke von $E$)
$\wedge(\forall\alpha : (\alpha$ untere $sse$_Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha \subseteq inf))$.

<u>Beweis **68-12**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $inf$ untere $sse$_Schranke von $E$
$\wedge(\forall\alpha : (\alpha$ untere $sse$_Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha \subseteq inf))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta$ untere $sse$_Schranke von $E$

`2.1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `Thema1.1` "$\beta$ untere $sse$_Schranke von $E$"
folgt via **68-9**: $\beta \in z$.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\beta$ untere $sse$_Schranke von $E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots\forall\alpha : (\alpha$ untere $sse$_Schranke von $E)$
$\Rightarrow (\alpha \subseteq inf)$"
folgt: $\beta \subseteq inf$.

`2.3:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `VS` gleich "$inf$ untere $sse$_Schranke von $E\ldots$"
folgt via **68-9**: $inf \in z$.

`3:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `2.2` "$\beta \subseteq inf$",
aus `2.1` "$\beta \in z$" und
aus `2.3` "$inf \in z$"
folgt via **68-4**: $\beta$_$sse$_$inf$.

Ergo `Thema1.1`: | `A1` | "$\forall\beta : (\beta$ untere $sse$_Schranke von $E) \Rightarrow (\beta$_$sse$_$inf)$" |

`1.2:` Aus →) "$inf$ untere $sse$_Schranke von $E$" und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : (\beta$ untere $sse$_Schranke von $z) \Rightarrow (\beta$_$sse$_$inf)$"
folgt via **36-1(Def)**: $inf$ ist $sse$_Infimum von $E$.

□

**68-13.** Falls *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist, dann ist folgendes Kriterium für *sse*_Suprema verfügbar:

**68-13(Satz)**

*Unter der Voraussetzung . . .*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in $z$.*

*. . . sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *sup ist sse_Supremum von $E$.*

`ii)` *"sup obere sse_Schranke von $E$"*
*und "$\forall\alpha : (\alpha$ obere sse_Schranke von $E) \Rightarrow (sup \subseteq \alpha)$".*

Beweis **68-13** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich *sup* ist *sse*_Supremum von $E$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "*sup* ist *sse*_Supremum von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: `A1` | "*sup* obere *sse*_Schranke von $E$"

`Thema1.2` $\alpha$ obere *sse*_Schranke von $E$.

`2:` Aus `VS` gleich "*sup* ist *sse*_Supremum von $E$" und
aus `Thema1.2` "$\alpha$ obere *sse*_Schranke von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: *sup_sse_*$\alpha$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus 2 "*sup_sse_*$\alpha$"
folgt via **68-4**: $sup \subseteq \alpha$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall\alpha : (\alpha$ obere *sse*_Schranke von $E) \Rightarrow (sup \subseteq \alpha)$"

`1.3:` Aus `A1` und
aus `A2`
folgt: ($sup$ obere *sse*_Schranke von $E$)
$\wedge(\forall\alpha : (\alpha$ obere *sse*_Schranke von $E) \Rightarrow (sup \subseteq \alpha))$.

Beweis **68-13** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\quad$ *sup* obere *sse*_Schranke von $E$
$\wedge(\forall\alpha : (\alpha$ obere *sse*_Schranke von $E) \Rightarrow (sup \subseteq \alpha))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\quad$ $\beta$ obere *sse*_Schranke von $E$

`2.1:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `Thema1.1` "$\beta$ obere *sse*_Schranke von $E$"
folgt via **68-9**: $\quad$ $\beta \in z$.

`2.2:` Aus `Thema1.1` "$\beta$ obere *sse*_Schranke von $E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots\forall\alpha : (\alpha$ obere *sse*_Schranke von $E)$
$\Rightarrow (sup \subseteq \alpha)$"
folgt: $\quad$ $sup \subseteq \beta$.

`2.3:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `VS` gleich "*sup* obere *sse*_Schranke von $E\ldots$"
folgt via **68-9**: $\quad$ $sup \in z$.

`3:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$",
aus `2.2` "$sup \subseteq \beta$",
aus `2.3` "$sup \in z$" und
aus `2.1` "$\beta \in z$"
folgt via **68-4**: $\quad$ *sup*_*sse*_$\beta$.

Ergo `Thema1.1`: $\quad$ `A1` | "$\forall\beta : (\beta$ obere *sse*_Schranke von $E) \Rightarrow$ (*sup*_*sse*_$\beta$)"

`1.2:` Aus →) "*sup* obere *sse*_Schranke von $E$" und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : (\beta$ obere *sse*_Schranke von $z) \Rightarrow$ (*sup*_*sse*_$\beta$)"
folgt via **36-1(Def)**: $\quad$ *sup* ist *sse*_Supremum von $E$.

□

**68-14.** Im folgenden Satz wird gesagt, wann $\bigcap E$ eine untere *sse*_Schranke *und* ein *sse*_Infimum von $E$ ist, wobei hier *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist:

**68-14(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in z.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $\bigcap E$ *untere sse_Schranke von E.*

`ii)` $\bigcap E$ *ist sse_Infimum von E.*

`iii)` "$\bigcap E \in z$" *und* "$E \subseteq z$".

<u>Beweis **68-14**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\bigcap E$ untere $sse$_Schranke von $E$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha$ untere $sse$_Schranke von $E$.

`2:` Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `Thema1.1` "$\alpha$ untere $sse$_Schranke von $E$"
folgt via **68-10**: $\alpha \subseteq \bigcap E$.

`3.1:` Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `Thema1.1` "$\alpha$ untere $sse$_Schranke von $E$"
folgt via **68-10**: $\alpha \in z$.

`3.2:` Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `VS` gleich "$\bigcap E$ untere $sse$_Schranke von $E$"
folgt via **68-10**: $\bigcap E \in z$.

`4:` Aus 2 "$\alpha \subseteq \bigcap E$",
aus `3.1` "$\alpha \in z$" und
aus `3.2` "$\bigcap E \in z$"
folgt via **68-4**: $\alpha$_$sse$_$\bigcap E$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha$ untere $sse$_Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha$_$sse$_$\bigcap E)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\bigcap E$ untere $sse$_Schranke von $E$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ untere $sse$_Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha$_$sse$_$\bigcap E)$"
folgt via **36-1(Def)**: $\bigcap E$ ist $sse$_Infimum von $E$.

<u>Beweis</u> **68-14** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\bigcap E$ ist *sse*_Infimum von $E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\bigcap E$ ist *sse*_Infimum von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $\bigcap E$ untere *sse*_Schranke von $E$.

`2:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `1` "$\bigcap E$ untere *sse*_Schranke von $E$"
folgt via **68-10**: $(\bigcap E \in z) \wedge (E \subseteq z)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(\bigcap E \in z) \wedge (E \subseteq z)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $\bigcap E \subseteq \bigcap E$.

`2:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$\bigcap E \in z \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq z$" und
aus `1` "$\bigcap E \subseteq \bigcap E$"
folgt via **68-10**: $\bigcap E$ untere *sse*_Schranke von $E$.

□

**68-15.** Im folgenden Satz wird gesagt, wann $\bigcup E$ eine obere *sse*_Schranke *und* ein *sse*_Supremum von $E$ ist, wobei hier *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist:

**68-15(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in z.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $\bigcup E$ *obere sse_Schranke von* $E$.

`ii)` $\bigcup E$ *ist sse_Supremum von* $E$.

`iii)` "$\bigcup E \in z$" *und* "$E \subseteq z$".

Beweis **68-15** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\bigcup E$ obere *sse*_Schranke von $E$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha$ obere *sse*_Schranke von $E$.

`2:` Aus →)"*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `Thema1.1`"$\alpha$ obere *sse*_Schranke von $E$"
folgt via **68-11**: $\bigcup E \subseteq \alpha$.

`3.1:` Aus →)"*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `VS` gleich "$\bigcup E$ obere *sse*_Schranke von $E$"
folgt via **68-11**: $\bigcup E \in z$.

`3.2:` Aus →)"*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `Thema1.1`"$\alpha$ obere *sse*_Schranke von $E$"
folgt via **68-11**: $\alpha \in z$.

`4:` Aus 2"$\bigcup E \subseteq \alpha$",
aus `3.1`"$\bigcup E \in z$" und
aus `3.2`"$\alpha \in z$"
folgt via **68-4**: $\bigcup E$_*sse*_$\alpha$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha$ : ($\alpha$ obere *sse*_Schranke von $E$) $\Rightarrow$ ($\bigcup E$_*sse*_$\alpha$)"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\bigcup E$ obere *sse*_Schranke von $E$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha$ : ($\alpha$ obere *sse*_Schranke von $E$) $\Rightarrow$ ($\bigcup E$_*sse*_$\alpha$)"
folgt via **36-1(Def)**: $\bigcup E$ ist *sse*_Supremum von $E$.

<u>Beweis **68-15**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\bigcup E$ ist *sse*_Supremum von $E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\bigcup E$ ist *sse*_Supremum von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $\bigcup E$ obere *sse*_Schranke von $E$.

`2:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `1` "$\bigcup E$ obere *sse*_Schranke von $E$"
folgt via **68-11**: $(\bigcup E \in z) \wedge (E \subseteq z)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(\bigcup E \in z) \wedge (E \subseteq z)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $\bigcup E \subseteq \bigcup E$.

`2:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$\bigcup E \in z \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq z$" und
aus `1` "$\bigcup E \subseteq \bigcup E$"
folgt via **68-11**: $\bigcup E$ obere *sse*_Schranke von $E$.

□

**68-16.** Durch Spezialisierung und unter Einbeziehung der leeren Menge folgt aus **68-14** das folgende Kriterium:

**68-16(Satz)**

*Unter der Voraussetzung . . .*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in $z$.*

*. . . sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` $\bigcap z$ *untere sse_Schranke von $z$.*

`ii)` $\bigcap z$ *ist sse_Infimum von $z$.*

`iii)` $\bigcap z$ *ist sse_Supremum von* $0$.

`iv)` $\bigcap z \in z$.

<u>Beweis **68-16**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $\bigcap z$ untere *sse*_Schranke von $z$.

Aus →) “*sse* InklusionsRelation in $z$” und
aus VS gleich “$\bigcap z$ untere *sse*_Schranke von $z$”
folgt via **68-14**: $\bigcap z$ ist *sse*_Infimum von $z$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $\bigcap z$ ist *sse*_Infimum von $z$.

1: Aus →) “*sse* InklusionsRelation in $z$”
folgt via **68-6**: *sse* antiSymmetrische Halbordnung in $z$.

2: Aus 1 “*sse* antiSymmetrische Halbordnung in $z$”
folgt via **34-13**: $(sse$ Relation in $z) \wedge (sse$ reflexiv in $z)$.

3: Aus 2 “*sse* Relation in $z \ldots$”,
aus 2 “$\ldots$ *sse* reflexiv in $z$” und
aus VS gleich “$\bigcap z$ ist *sse*_Infimum von $z$”
folgt via **43-8**: $\bigcap z$ ist *sse*_Supremum von 0.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $\bigcap z$ ist *sse*_Supremum von 0.

1: Aus VS gleich “$\bigcap z$ ist *sse*_Supremum von 0”
folgt via **36-1(Def)**: $\bigcap z$ obere *sse*_Schranke von 0.

2: Aus →) “*sse* InklusionsRelation in $z$” und
aus 1 “$\bigcap z$ obere *sse*_Schranke von 0”
folgt via **68-9**: $\bigcap z \in z$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $\bigcap z \in z$.

1: Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

2: Aus →) “*sse* InklusionsRelation in $z$”,
aus VS gleich “$\bigcap z \in z$” und
aus 1 “$z \subseteq z$”
folgt via **68-14**: $\bigcap z$ untere *sse*_Schranke von $z$.

□

**68-17.** Durch Spezialisierung und unter Einbeziehung der leeren Menge folgt aus **68-15** das folgende Kriterium:

**68-17(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in z.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` $\bigcup z$ *obere sse_Schranke von z.*

`ii)` $\bigcup z$ *ist sse_Supremum von z.*

`iii)` $\bigcup z$ *ist sse_Infimum von* $0$.

`iv)` $\bigcup z \in z$.

<u>Beweis **68-17**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $\bigcup z$ obere *sse*_Schranke von $z$.

Aus →) " *sse* InklusionsRelation in $z$ " und
aus VS gleich " $\bigcup z$ obere *sse*_Schranke von $z$ "
folgt via **68-15**: $\bigcup z$ ist *sse*_Supremum von $z$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $\bigcup z$ ist *sse*_Supremum von $z$.

1: Aus →) " *sse* InklusionsRelation in $z$ "
folgt via **68-6**: *sse* antiSymmetrische Halbordnung in $z$.

2: Aus 1 " *sse* antiSymmetrische Halbordnung in $z$ "
folgt via **34-13**: $(sse$ Relation in $z) \wedge (sse$ reflexiv in $z)$.

3: Aus 2 " *sse* Relation in $z \ldots$ " ,
aus 2 " $\ldots$ *sse* reflexiv in $z$ " und
aus VS gleich " $\bigcup z$ ist *sse*_Supremum von $z$ "
folgt via **43-7**: $\bigcup z$ ist *sse*_Infimum von $0$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $\bigcup z$ ist *sse*_Infimum von $0$.

1: Aus VS gleich " $\bigcup z$ ist *sse*_Infimum von $0$ "
folgt via **36-1(Def)**: $\bigcup z$ untere *sse*_Schranke von $0$.

2: Aus →) " *sse* InklusionsRelation in $z$ " und
aus 1 " $\bigcup z$ untere *sse*_Schranke von $0$ "
folgt via **68-9**: $\bigcup z \in z$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $\bigcup z \in z$.

1: Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

2: Aus →) " *sse* InklusionsRelation in $z$ " ,
aus VS gleich " $\bigcup z \in z$ " und
aus 1 " $z \subseteq z$ "
folgt via **68-15**: $\bigcup z$ obere *sse*_Schranke von $z$.

□

**68-18.** Im folgenden Satz wird fest gehalten, wann es eine "universelle" untere oder obere *sse*_Schranke gibt, wobei *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist:

**68-18(Satz)**

*Aus "sse InklusionsRelation in z" und "$E \subseteq z$" und ...*

a) *... und "$0 \in z$" folgt "0 untere sse_Schranke von E".*

b) *... und "$\bigcup z \in z$" folgt "$\bigcup z$ obere sse_Schranke von E".*

Beweis **68-18** a) VS gleich $(sse \text{ InklusionsRelation in } z) \wedge (E \subseteq z) \wedge (0 \in z)$.

1: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \bigcap E$.

2: Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$",
aus VS gleich "... $0 \in z$",
aus VS gleich "... $E \subseteq z$ ..." und
aus 1 "$0 \subseteq \bigcap E$"
folgt via **68-10**: 0 untere *sse*_Schranke von $E$.

b) VS gleich $(sse \text{ InklusionsRelation in } z) \wedge (E \subseteq z) \wedge (\bigcup z \in z)$.

1: Aus VS gleich "... $E \subseteq z$ ..."
folgt via **1-15**: $\bigcup E \subseteq \bigcup z$.

2: Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$",
aus VS gleich "... $\bigcup z \in z$",
aus VS gleich "... $E \subseteq z$ ..." und
aus 1 "$\bigcup E \subseteq \bigcup z$"
folgt via **68-11**: $\bigcup z$ obere *sse*_Schranke von $E$.

□

**68-19.** Das folgende Resultat wird durch Spezialisierungen aus **68-18** gewonnen:

**68-19(Satz)**

*Aus "sse InklusionsRelation in z" und ...*

a) ... *und* "$0 \in z$" *folgt* "$0$ *untere sse_Schranke von* $0$".

b) ... *und* "$0 \in z$" *folgt* "$0$ *untere sse_Schranke von* $z$".

c) ... *und* "$\bigcup z \in z$" *folgt* "$\bigcup z$ *obere sse_Schranke von* $0$".

d) ... *und* "$\bigcup z \in z$" *folgt* "$\bigcup z$ *obere sse_Schranke von* $z$".

<u>Beweis **68-19**</u> `a)` `VS` gleich $(sse \text{ InklusionsRelation in } z) \wedge (0 \in z)$.

`1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq z$.

`2:` Aus `VS` gleich "$sse$ InklusionsRelation in $z\ldots$",
aus `1` "$0 \subseteq z$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \in z$"
folgt via **68-18**: 0 untere $sse$_Schranke von 0.

`b)` `VS` gleich $(sse \text{ InklusionsRelation in } z) \wedge (0 \in z)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

`2:` Aus `VS` gleich "$sse$ InklusionsRelation in $z\ldots$",
aus `1` "$z \subseteq z$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \in z$"
folgt via **68-18**: 0 untere $sse$_Schranke von $z$.

`c)` `VS` gleich $(sse \text{ InklusionsRelation in } z) \wedge (\bigcup z \in z)$.

`1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq z$.

`2:` Aus `VS` gleich "$sse$ InklusionsRelation in $z\ldots$",
aus `1` "$0 \subseteq z$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \bigcup z \in z$"
folgt via **68-18**: $\bigcup z$ obere $sse$_Schranke von 0.

`d)` `VS` gleich $(sse \text{ InklusionsRelation in } z) \wedge (\bigcup z \in z)$.

`1:` Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

`2:` Aus `VS` gleich "$sse$ InklusionsRelation in $z\ldots$",
aus `1` "$z \subseteq z$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \bigcup z \in z$"
folgt via **68-18**: $\bigcup z$ obere $sse$_Schranke von $z$.

□

**68-20.** Ist $sse$ die InklusionsRelation in $z$, so ist jedes Element von $z$ sowohl untere als auch obere $sse$_Schranke von 0:

**68-20(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $p \in z$.

`ii)` *$p$ untere $sse$_Schranke von* 0.

`iii)` *$p$ obere $sse$_Schranke von* 0.

Beweis **68-20**

`1:` Aus $\rightarrow$)"$sse$ InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: $sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$.

`2:` Aus `1`"$sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt vai **34-13**: ($sse$ Relation in $z$) $\wedge$ ($sse$ reflexiv in $z$).

`3:` Aus `2`"$sse$ Relation in $z$ ..." und
aus `2`"... $sse$ reflexiv in $z$"
folgt via **43-5**: $p \in z$
$\Leftrightarrow$ ($p$ untere $sse$_Schranke von 0)
$\Leftrightarrow$ ($p$ obere $sse$_Schranke von 0).

$\square$

**68-21.** Falls *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist, so hat jede Klasse höchstens ein *sse*_Infimum und jede untere *sse*_Schranke von $E$ ist eine TeilKlasse jedes *sse*_Infimums von $E$:

**68-21(Satz)**

*Aus "sse InklusionsRelation in z"*
*und "inf ist sse_Infimum von E" und ...*

a) *... und "j ist sse_Infimum von E"*
*folgt "inf = j".*

b) *... und "u untere sse_Schranke von E"*
*folgt "u ⊆ inf".*

Beweis **68-21** a) VS gleich ($sse$ InklusionsRelation in $z$)
$\wedge$($inf$ ist $sse$_Infimum von $E$) $\wedge$ ($j$ ist $sse$_Infimum von $E$).

1: Aus VS gleich "$sse$ InklusionsRelation in $z$... "
folgt via **68-6**: $sse$ antiSymmetrisch.

2: Aus 1"$sse$ antiSymmetrisch",
aus VS gleich "... $inf$ ist $sse$_Infimum von $E$..." und
aus VS gleich "... $j$ ist $sse$_Infimum von $E$"
folgt via **46-2**: $inf = j$.

b) VS gleich ($sse$ InklusionsRelation in $z$)
$\wedge$($inf$ ist $sse$_Infimum von $E$) $\wedge$ ($u$ untere $sse$_Schranke von $E$).

1: Aus VS gleich "... $inf$ ist $sse$_Infimum von $E$..." und
aus VS gleich "... $u$ untere $sse$_Schranke von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $u\_sse\_inf$.

2: Aus →)"$sse$ InklusionsRelation in $z$... " und
aus 1"$u\_sse\_inf$"
folgt via **68-4**: $u \subseteq inf$.

□

**68-22.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist, so hat jede Klasse höchstens ein $sse$_Supremum und jedes $sse$_Supremum von $E$ ist TeilKlasse jeder oberen $sse$_Schranke von $E$:

**68-22(Satz)**

*Aus "sse InklusionsRelation in z"*
*und "sup ist sse_Supremum von E" und ...*

a) *... und "s ist sse_Supremum von E"*
*folgt "$sup = s$".*

b) *... und "o obere sse_Schranke von E"*
*folgt "$sup \subseteq o$".*

Beweis **68-22** a) VS gleich ($sse$ InklusionsRelation in $z$)
$\wedge$($sup$ ist $sse$_Supremum von $E$) $\wedge$ ($s$ ist $sse$_Supremum von $E$).

1: Aus VS gleich "$sse$ InklusionsRelation in $z$... "
folgt via **68-6**: $sse$ antiSymmetrisch.

2: Aus 1"$sse$ antiSymmetrisch",
aus VS gleich "...$sup$ ist $sse$_Supremum von $E$..." und
aus VS gleich "...$s$ ist $sse$_Supremum von $E$"
folgt via **46-3**: $sup = s$.

b) VS gleich ($sse$ InklusionsRelation in $z$)
$\wedge$($sup$ ist $sse$_Supremum von $E$) $\wedge$ ($o$ obere $sse$_Schranke von $E$).

1: Aus VS gleich "...$sup$ ist $sse$_Supremum von $E$..." und
aus VS gleich "...$o$ obere $sse$_Schranke von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $sup\_sse\_o$.

2: Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$... " und
aus 1"$sup\_sse\_o$"
folgt via **68-4**: $sup \subseteq o$.

□

**68-23.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist, falls der Durchschnitt von $E$ in $z$ ist und falls $E$ ein $sse$_Infimum hat, dann ist $\bigcap E$ das $sse$_Infimum von $E$:

<u>**68-23(Satz)**</u>

*Es gelte:*

→) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

→) $\bigcap E \in z$.

→) *$inf$ ist $sse$_Infimum von $E$.*

*Dann folgt:*

a) *$\bigcap E$ ist $sse$_Infimum von $E$.*

b) $inf = \bigcap E$.

<u>Beweis **68-23**</u>

1: Aus →) "$inf$ ist $sse$_Infimum von $E$"
folgt via **36-1(Def)**: $inf$ untere $sse$_Schranke von $E$.

2: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus 1 "$inf$ untere $sse$_Schranke von $E$"
folgt via **68-9**: $E \subseteq z$.

3.a): Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus →) "$\bigcap E \in z$" und
aus 2 "$E \subseteq z$"
folgt via **68-14**: $\bigcap E$ ist $sse$_Infimum von $E$.

4.b): Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus →) "$inf$ ist $sse$_Infimum von $E$" und
aus 3.a) "$\bigcap E$ ist $sse$_Infimum von $E$"
folgt via **68-21**: $inf = \bigcap E$.

□

**68-24.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist, falls die Vereinigung von $E$ in $z$ ist und falls $E$ ein $sse$_Supremum hat, dann ist $\bigcup E$ das $sse$_Supremum von $E$:

**68-24(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

$\rightarrow$) $\bigcup E \in z$.

$\rightarrow$) *$sup$ ist $sse$_Supremum von $E$.*

*Dann folgt:*

a) *$\bigcup E$ ist $sse$_Supremum von $E$.*

b) $sup = \bigcup E$.

Beweis **68-24**

1: Aus $\rightarrow$) "$sup$ ist $sse$_Supremum von $E$"
folgt via **36-1**: $sup$ obere $sse$_Schranke von $E$.

2: Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus 1 "$sup$ obere $sse$_Schranke von $E$"
folgt via **68-9**: $E \subseteq z$.

3.a): Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus $\rightarrow$) "$\bigcup E \in z$" und
aus 2 "$E \subseteq z$"
folgt via **68-15**: $\bigcup E$ ist $sse$_Supremum von $E$.

4.b): Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus $\rightarrow$) "$sup$ ist $sse$_Supremum von $E$" und
aus 3.a) "$\bigcup E$ ist $sse$_Supremum von $E$"
folgt via **68-22**: $sup = \bigcup E$.

□

**68-25.** Im Spezialfall $E = z$ und unter Einbeziehung der leeren Menge kann **68-23** verschärft werden:

**68-25(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *sse InklusionsRelation in z.*

$\rightarrow\!)$ *p untere sse_Schranke von z.* *oder* *p ist sse_Supremum von 0.*

*Dann folgt:*

a) *p ist sse_Infimum von z.*

b) *p ist sse_Supremum von 0.*

c) $p = \bigcap z$.

d) $\bigcap z \in z$.

Beweis **68-25**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "*sse* InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: *sse* antiSymmetrische Halbordunung in $z$.

2: Aus 1.1 "*sse* antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-13**: ($sse$ Relation in $z$) $\wedge$ ($sse$ reflexiv in $z$).

...

Beweis **68-25** ...

`3.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $p$ untere $sse$_Schranke von $z$ $\vee(p$ ist $sse$_Supremum von $0)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $p$ untere $sse$_Schranke von $z$.

Aus 2"$sse$ Relation in $z\ldots$" und
aus `3.1.1.Fall`"$p$ untere $sse$_Schranke von $z$"
folgt via **37-2**: $p$ ist $sse$_Infimum von $z$.

`3.1.2.Fall` $p$ ist $sse$_Supremum von 0.

Aus 2"$sse$ Relation in $z\ldots$",
aus 2"$\ldots sse$ reflexiv in $z$" und
aus `3.1.2.Fall`"$p$ ist $sse$_Supremum von 0"
folgt via **43-8**: $p$ ist $sse$_Infimum von $z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$p$ ist $sse$_Infimum von $z$"

`3.a):` Aus `A1`
folgt: $p$ ist $sse$_Infimum von $z$.

`3.1:` Aus `A1` gleich "$p$ ist $sse$_Infimum von $z$"
folgt via **36-1(Def)**: $p$ untere $sse$_Schranke von $z$.

`4.b):` Aus 2"$sse$ Relation in $z\ldots$",
aus 2"$\ldots sse$ reflexiv in $z$" und
aus `3.a)`"$p$ ist $sse$_Infimum von $z$"
folgt via **43-8**: $p$ ist $sse$_Supremum von 0.

`4.1:` Aus $\rightarrow$)"$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `3.1`"$p$ untere $sse$_Schranke von $z$"
folgt via **68-9**: $p \in z$.

...

<u>Beweis</u> **68-25** ...

5: Aus 4.1 "$p \in z$"
folgt via **1-15**: $\bigcap z \subseteq p$.

6: Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus 3.1 "$p$ untere *sse*_Schranke von $z$"
folgt via **68-10**: $p \subseteq \bigcap z$.

7.c): Aus 6 "$p \subseteq \bigcap z$" und
aus 5 "$\bigcap z \subseteq p$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $p = \bigcap z$.

8.d): Aus 4.1 "$p \in z$" und
aus 7.c) "$p = \bigcap z$"
folgt: $\bigcap z \in z$.

□

**68-26.** Im Spezialfall $E = z$ und unter Einbeziehung der leeren Menge kann **68-24** verschärft werden:

**68-26(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in z.*

$\rightarrow$) *p obere sse_Schranke von z.* *oder* *p ist sse_Infimum von* $0$.

*Dann folgt:*

a) *p ist sse_Supremum von z.*

b) *p ist sse_Infimum von* $0$.

c) $p = \bigcup z$.

d) $\bigcup z \in z$.

Beweis **68-26**

1: Aus $\rightarrow$) "*sse* InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: *sse* antiSymmetrische Halbordunung in $z$.

2: Aus 1.1 "*sse* antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-13**: (*sse* Relation in $z$) $\wedge$ (*sse* reflexiv in $z$).

...

Beweis **68-26** . . .

3.1: Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $p$ obere *sse*_Schranke von $z$ $\vee$($p$ ist *sse*_Supremum von 0).

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $p$ obere *sse*_Schranke von $z$.

Aus 2"*sse* Relation in $z$ . . ." und
aus `3.1.1.Fall`"$p$ obere *sse*_Schranke von $z$"
folgt via **37-2**: $p$ ist *sse*_Supremum von $z$.

`3.1.2.Fall` $p$ ist *sse*_Infimum von 0.

Aus 2"*sse* Relation in $z$ . . .",
aus 2". . . *sse* reflexiv in $z$" und
aus `3.1.2.Fall`"$p$ ist *sse*_Infimum von 0"
folgt via **43-7**: $p$ ist *sse*_Supremum von $z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$p$ ist *sse*_Supremum von $z$"

3.a): Aus A1
folgt: $p$ ist *sse*_Supremum von $z$.

3.1: Aus A1 gleich "$p$ ist *sse*_Supremum von $z$"
folgt via **36-1(Def)**: $p$ obere *sse*_Schranke von $z$.

4.b): Aus 2"*sse* Relation in $z$ . . .",
aus 2". . . *sse* reflexiv in $z$" und
aus 3.a)"$p$ ist *sse*_Supremum von $z$"
folgt via **43-7**: $p$ ist *sse*_Infimum von 0.

4.1: Aus $\rightarrow$)"*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus 3.1"$p$ obere *sse*_Schranke von $z$"
folgt via **68-9**: $p \in z$.

. . .

<u>Beweis **68-26**</u> ...

`5:` Aus `4.1`“$p \in z$”
folgt via **1-15**: $p \subseteq \bigcup z$.

`6:` Aus →)“$sse$ InklusionsRelation in $z$” und
aus `3.1`“$p$ obere $sse$_Schranke von $z$”
folgt via **68-11**: $\bigcup z \subseteq p$.

`7.c):` Aus `5`“$p \subseteq \bigcup z$” und
aus `6`“$\bigcup z \subseteq p$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $p = \bigcup z$.

`8.d):` Aus `4.1`“$p \in z$” und
aus `7.c)`“$p = \bigcup z$”
folgt: $\bigcup z \in z$.

□

**68-27.** Falls *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist und falls *min* ein *sse*_Minimum von $E$ ist, dann ist *min* gleich $\bigcap E$ und $\bigcap E$ ist in $E$ und in $z$:

**68-27(Satz)**

*Es gelte:*

→) *sse InklusionsRelation in z.*

→) *min ist sse_Minimum von E.*

*Dann folgt:*

a) $min = \bigcap E$.

b) $\bigcap E \in E$.

c) $\bigcap E \in z$.

Beweis **68-27**

1: Aus →) "*min* ist *sse*_Minimum von $E$"
folgt via **38-1(Def)**: $(min$ untere $sse$_Schranke von $E) \wedge (min \in E)$.

2.1: Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus 1 "*min* untere *sse*_Schranke von $E\ldots$"
folgt via **68-10**: $(min \in z) \wedge (min \subseteq \bigcap E)$.

2.2: Aus 1 "$\ldots min \in E$"
folgt via **1-15**: $\bigcap E \subseteq min$.

3.a): Aus 2.1 "$\ldots min \subseteq \bigcap E$" und
aus 2.2 "$\bigcap E \subseteq min$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $min = \bigcap E$.

4.b): Aus 1 "$\ldots min \in E$" und
aus 3.a) "$min = \bigcap E$"
folgt: $\bigcap E \in E$.

4.c): Aus 2.1 "$min \in z\ldots$" und
aus 3.a) "$min = \bigcap E$"
folgt: $\bigcap E \in z$.

□

**68-28.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist und falls $max$ ein $sse$_Maximum von $E$ ist, dann ist $max$ gleich $\bigcup E$ und $\bigcup E$ ist in $E$ und in $z$:

**68-28(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

$\rightarrow$) *$max$ ist $sse$_Maximum von $E$.*

*Dann folgt:*

a) $max = \bigcup E$.

b) $\bigcup E \in E$.

c) $\bigcup E \in z$.

Beweis **68-28**

1: Aus $\rightarrow$)“$max$ ist $sse$_Maximum von $E$”
folgt via **38-1(Def)**: $(max$ obere $sse$_Schranke von $E) \wedge (max \in E)$.

2.1: Aus $\rightarrow$)“$sse$ InklusionsRelation in $z$” und
aus 1“$max$ obere $sse$_Schranke von $E \ldots$”
folgt via **68-11**: $(max \in z) \wedge (\bigcup E \subseteq max)$.

2.2: Aus 1“$\ldots max \in E$”
folgt via **1-15**: $max \subseteq \bigcup E$.

3.a): Aus 2.2“$max \subseteq \bigcup E$” und
aus 2.1“$\ldots \bigcup E \subseteq max$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $max = \bigcup E$.

4.b): Aus 1“$\ldots max \in E$” und
aus 3.a)“$max = \bigcup E$”
folgt: $\bigcup E \in E$.

4.c): Aus 2.1“$max \in z \ldots$” und
aus 3.a)“$max = \bigcup E$”
folgt: $\bigcup E \in z$.

□

**68-29.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist, dann hat eine Klasse $E$ genau dann ein $sse$_Minimum, wenn $\bigcap E$ ein $sse$_Minimum von $E$ ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $\bigcap E \in E \subseteq z$:

**68-29(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

→) *sse InklusionsRelation in z.*

*... sind die Aussagen* i), ii), iii) *äquivalent:*

i) $\exists \Omega : \Omega$ *ist sse_Minimum von E.*

ii) $\bigcap E$ *ist sse_Minimum von E.*

iii) $\bigcap E \in E \subseteq z$.

<u>Beweis **68-29**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\exists\Omega : \Omega$ ist *sse*_Minimum von $E$.

`1:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `VS` gleich "... $\Omega$ ist *sse*_Minimum von $E$"
folgt via **68-27**: $\Omega = \bigcap E$.

`2:` Aus `VS` gleich "... $\Omega$ ist *sse*_Minimum von $z$" und
aus 2"$\Omega = \bigcap E$"
folgt: $\bigcap E$ ist *sse*_Minimum von $z$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $\bigcap E$ ist *sse*_Minimum von $E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\bigcap E$ ist *sse*_Minimum von $E$"
folgt via **38-1(Def)**: ($\bigcap E$ untere *sse*_Schranke von $E$) $\wedge$ ($\bigcap E \in E$).

`2:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `1`"$\bigcap E$ untere *sse*_Schranke von $E$ ..."
folgt via **68-9**: $E \subseteq z$.

`3:` Aus `1`"... $\bigcap E \in E$" und
aus `2`"$E \subseteq z$"
folgt: $\bigcap E \in E \subseteq z$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\bigcap E \in E \subseteq z$.

`1.1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = \bigcap E$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\bigcap E \in E$ ..." und
aus `VS` gleich "... $E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\bigcap E \in z$.

`2:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$",
aus `1.2`"$\bigcap E \in z$" und
aus `VS` gleich "... $E \subseteq z$"
folgt via **68-14**: $\bigcap E$ untere *sse*_Schranke von $E$.

`3:` Aus `2`"$\bigcap E$ untere *sse*_Schranke von $E$" und
aus `VS` gleich "$\bigcap E \in E$ ..."
folgt via **38-1(Def)**: $\bigcap E$ ist *sse*_Minimum von $E$.

`4:` Aus `1.1`"... $\Omega = \bigcap E$" und
aus `3`"$\bigcap E$ ist *sse*_Minimum von $E$"
folgt: $\Omega$ ist *sse*_Minimum von $E$.

`5:` Aus `1.1`"$\exists\Omega$ ..." und
aus `4`"$\Omega$ ist *sse*_Minimum von $E$"
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ ist *sse*_Minimum von $E$.

□

**68-30.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist, dann hat eine Klasse $E$ genau dann ein $sse$_Maximum, wenn $\bigcup E$ ein $sse$_Maximum von $E$ ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $\bigcup E \in E \subseteq z$:

**68-30(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $\exists \Omega : \Omega$ *ist $sse$_Maximum von $E$.*

`ii)` $\bigcup E$ *ist $sse$_Maximum von $E$.*

`iii)` $\bigcup E \in E \subseteq z$.

<u>Beweis **68-30**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\exists\Omega : \Omega$ ist *sse*_Maximum von $E$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `VS` gleich "… $\Omega$ ist *sse*_Maximum von $E$"
folgt via **68-28**: $\Omega = \bigcup E$.

`2:` Aus `VS` gleich "… $\Omega$ ist *sse*_Maximum von $z$" und
aus 2"$\Omega = \bigcup E$"
folgt: $\bigcup E$ ist *sse*_Maximum von $z$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\bigcup E$ ist *sse*_Maximum von $E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\bigcup E$ ist *sse*_Maximum von $E$"
folgt via **38-1(Def)**: $(\bigcup E$ obere *sse*_Schranke von $E) \wedge (\bigcup E \in E)$.

`2:` Aus $\rightarrow$) "*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `1`"$\bigcup E$ obere *sse*_Schranke von $E$ …"
folgt via **68-9**: $E \subseteq z$.

`3:` Aus `1`"… $\bigcup E \in E$" und
aus 2"$E \subseteq z$"
folgt: $\bigcup E \in E \subseteq z$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\bigcup E \in E \subseteq z$.

`1.1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = \bigcup E$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\bigcup E \in E$ …" und
aus `VS` gleich "… $E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\bigcup E \in z$.

`2:` Aus $\rightarrow$) "*sse* InklusionsRelation in $z$",
aus `1.2`"$\bigcup E \in z$" und
aus `VS` gleich "… $E \subseteq z$"
folgt via **68-15**: $\bigcup E$ obere *sse*_Schranke von $E$.

`3:` Aus 2"$\bigcup E$ obere *sse*_Schranke von $E$" und
aus `VS` gleich "$\bigcup E \in E$ …"
folgt via **38-1(Def)**: $\bigcup E$ ist *sse*_Maximum von $E$.

`4:` Aus `1.1`"… $\Omega = \bigcup E$" und
aus 3"$\bigcup E$ ist *sse*_Maximum von $E$"
folgt: $\Omega$ ist *sse*_Maximum von $E$.

`5:` Aus `1.1`"$\exists\Omega$ …" und
aus 4"$\Omega$ ist *sse*_Maximum von $E$"
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ ist *sse*_Maximum von $E$.

$\square$

**68-31.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist, so ist aus **68-29** durch Spezialisierung $E = z$ leicht folgendes Kriterium für die Existenz eines $sse$_Minimums von $z$ zu gewinnen:

**68-31(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $\exists \Omega : \Omega$ *ist $sse$_Minimum von $z$.*

`ii)` $\bigcap z$ *ist $sse$_Minimum von $z$.*

`iii)` $\bigcap z \in z$.

Beweis **68-31** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\exists \Omega : \Omega$ ist $sse$_Minimum von $z$.

Aus $\rightarrow$)"$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `VS` gleich "$\exists \Omega : \Omega$ ist $sse$_Minimum von $z$"
folgt via **68-29**: $\bigcap z$ ist $sse$_Minimum von $z$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\bigcap z$ ist $sse$_Minimum von $z$.

Aus $\rightarrow$)"$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `VS` gleich "$\bigcap z$ ist $sse$_Minimum von $z$"
folgt via **68-29**: $\bigcap z \in z$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\bigcap z \in z$.

`1:` Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\bigcap z \in z$" und
aus `1`"$z \subseteq z$"
folgt: $\bigcap z \in z \subseteq z$.

`3:` Aus $\rightarrow$)"$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `2`"$\bigcap z \in z \subseteq z$"
folgt via **68-29**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $sse$_Minimum von $z$.

□

**68-32.** Falls *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist, so ist aus **68-30** durch Spezialisierung $E = z$ leicht folgendes Kriterium für die Existenz eines *sse*_Maximums von $z$ zu gewinnen:

**68-32(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in* $z$.

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $\exists \Omega : \Omega$ *ist sse_Maximum von* $z$.

`ii)` $\bigcup z$ *ist sse_Maximum von* $z$.

`iii)` $\bigcup z \in z$.

Beweis **68-32** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\exists \Omega : \Omega$ ist *sse*_Maximum von $z$.

Aus $\rightarrow$)"*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `VS` gleich "$\exists \Omega : \Omega$ ist *sse*_Maximum von $z$"
folgt via **68-30**: $\bigcup z$ ist *sse*_Maximum von $z$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\bigcup z$ ist *sse*_Maximum von $z$.

Aus $\rightarrow$)"*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `VS` gleich "$\bigcup z$ ist *sse*_Maximum von $z$"
folgt via **68-30**: $\bigcup z \in z$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\bigcup z \in z$.

`1:` Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\bigcup z \in z$" und
aus `1`"$z \subseteq z$"
folgt: $\bigcup z \in z \subseteq z$.

`3:` Aus $\rightarrow$)"*sse* InklusionsRelation in $z$" und
aus `2`"$\bigcup z \in z \subseteq z$"
folgt via **68-30**: $\exists \Omega : \Omega$ ist *sse*_Maximum von $z$.

$\square$

**68-33.** Nun folgt eine Charakterisierung *sse*_minimaler Elemente von $E$, wenn *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist und $E$ eine TeilKlasse von $z$ ist:

**68-33(Satz)**

*Unter den Voraussetzungen ...*

→) *sse InklusionsRelation in* $z$.

→) $E \subseteq z$.

*... sind die Aussagen* i), ii) *äquivalent:*

i) $p$ *ist sse_minimales Element von* $E$.

ii) "$p \in E$" *und* "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha \subseteq p)) \Rightarrow (p \subseteq \alpha)$".

iii) "$p \in E$" *und* "$\forall \beta : ((\beta \in E) \wedge (\beta \subseteq p)) \Rightarrow (p = \beta)$".

Beweis **68-33** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p$ ist *sse*_minimales Element von $E$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$p$ ist *sse*_minimales Element von $E$”
folgt via **39-1(Def)**: `A1` | “$p \in E$”

`Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge (\alpha \subseteq p)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in E \ldots$” und
aus →) “$E \subseteq z$”
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`2.2:` Aus `A1` gleich “$p \in E$” und
aus →) “$E \subseteq z$”
folgt via **0-4**: $p \in z$.

`3:` Aus →) “*sse* InklusionsRelation in $z$”,
aus `Thema1.2`“$\ldots \alpha \subseteq p$”,
aus `2.1`“$\alpha \in z$” und
aus `2.2`“$p \in z$”
folgt via **68-4**: $\alpha$_*sse*_$p$.

`4:` Aus `VS` gleich “$p$ ist *sse*_minimales Element von $E$”,
aus `Thema1.2`“$\alpha \in E \ldots$” und
aus 3“$\alpha$_*sse*_$p$”
folgt via **39-1(Def)**: $p$_*sse*_$\alpha$.

`5:` Aus 4“$p$_*sse*_$\alpha$”
folgt via **68-4**: $p \subseteq \alpha$.

Ergo `Thema1`: `A2` | “$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha \subseteq p)) \Rightarrow (p \subseteq \alpha)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$p \in E$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha \subseteq p)) \Rightarrow (p \subseteq \alpha)$”
folgt: $(p \in E) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha \subseteq p)) \Rightarrow (p \subseteq \alpha))$.

Beweis **68-33**

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(p \in E) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha \subseteq p)) \Rightarrow (p \subseteq \alpha))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta \in E) \wedge (\beta \subseteq p)$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in E \ldots$”,
aus `Thema1.1`“$\ldots \beta \subseteq p$” und
aus `VS` gleich “$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha \subseteq p)) \Rightarrow (p \subseteq \alpha)$”
folgt: $p \subseteq \beta$.

`3:` Aus `2`“$p \subseteq \beta$” und
aus `Thema1.1`“$\ldots \beta \subseteq p$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $p = \beta$.

Ergo `Thema1`: `A1` | “$\forall \beta : ((\beta \in E) \wedge (\beta \subseteq p)) \Rightarrow (p = \beta)$”

`1.2:` Aus `VS` gleich “$p \in E \ldots$” und
aus `A1` gleich “$\forall \beta : ((\beta \in E) \wedge (\beta \subseteq p)) \Rightarrow (p = \beta)$”
folgt: $(p \in E) \wedge (\forall \beta : ((\beta \in E) \wedge (\beta \subseteq p)) \Rightarrow (p = \beta))$.

<u>Beweis **68-33**</u>

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \in E) \wedge (\forall \beta : ((\beta \in E) \wedge (\beta \subseteq p)) \Rightarrow (p = \beta))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha \in E) \wedge (\alpha\_sse\_p)$.

`2:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `Thema1.1` "$\ldots \alpha\_sse\_p$"
folgt via **68-4**: $\alpha \subseteq p$.

`3:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in E \ldots$",
aus `2` "$\alpha \subseteq p$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \beta : ((\beta \in E) \wedge (\beta \subseteq p)) \Rightarrow (p = \beta)$"
folgt: $p = \alpha$.

`4:` Aus `3` "$p = \alpha$"
folgt via **0-6**: $p \subseteq \alpha$.

`5.1:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $p \in z$.

`5.2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in E \ldots$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`6:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `4` "$p \subseteq \alpha$",
aus `5.1` "$p \in z$" und
aus `5.2` "$\alpha \in z$"
folgt via **68-4**: $p\_sse\_\alpha$.

Ergo `Thema1.1`: | `A1` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_sse\_p)) \Rightarrow (p\_sse\_\alpha)$" |

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (\alpha\_sse\_p)) \Rightarrow (p\_sse\_\alpha)$"
folgt via **39-1(Def)**: $p$ ist $sse$_minimales Element von $E$.

□

**68-34.** Nun folgt eine Charakterisierung *sse*_maximaler Elemente von $E$, wenn *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist und $E$ eine TeilKlasse von $z$ ist:

**68-34(Satz)**

*Unter den Voraussetzungen …*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in* $z$.

$\rightarrow$) $E \subseteq z$.

*… sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $p$ *ist sse_maximales Element von* $E$.

`ii)` *“*$p \in E$*” und “*$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p \subseteq \alpha)) \Rightarrow (\alpha \subseteq p)$*”*.

`iii)` *“*$p \in E$*” und “*$\forall \beta : ((\beta \in E) \wedge (p \subseteq \beta)) \Rightarrow (\beta = p)$*”*.

<u>Beweis **68-34**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p$ ist *sse*_maximales Element von $E$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p$ ist *sse*_maximales Element von $E$"
folgt via **39-1(Def)**: `A1` | "$p \in E$"

`Thema1.2` $(\alpha \in E) \wedge (p \subseteq \alpha)$.

`2.1:` Aus `A1` gleich "$p \in E$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $p \in z$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in E \ldots$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z$.

`3:` Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$",
aus `Thema1.2`"$\ldots p \subseteq \alpha$",
aus `2.1`"$p \in z$" und
aus `2.2`"$\alpha \in z$"
folgt via **68-4**: $p$_*sse*_$\alpha$.

`4:` Aus `VS` gleich "$p$ ist *sse*_maximales Element von $E$",
aus `Thema1.2`"$\alpha \in E \ldots$" und
aus `3`"$p$_*sse*_$\alpha$"
folgt via **39-1(Def)**: $\alpha$_*sse*_$p$.

`5:` Aus `4`"$\alpha$_*sse*_$p$"
folgt via **68-4**: $\alpha \subseteq p$.

Ergo `Thema1`: `A2` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p \subseteq \alpha)) \Rightarrow (\alpha \subseteq p)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$p \in E$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p \subseteq \alpha)) \Rightarrow (p \subseteq \alpha)$"
folgt: $(p \in E) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p \subseteq \alpha)) \Rightarrow (p \subseteq \alpha))$.

Beweis **68-34**

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(p \in E) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p \subseteq \alpha)) \Rightarrow (\alpha \subseteq p))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta \in E) \wedge (p \subseteq \beta)$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\beta \in E \ldots$",
aus `Thema1.1` "$\ldots p \subseteq \beta$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p \subseteq \alpha)) \Rightarrow (\alpha \subseteq p)$"
folgt: $\beta \subseteq p$.

`3:` Aus `2` "$\beta \subseteq p$" und
aus `Thema1.1` "$\ldots p \subseteq \beta$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\beta = p$.

Ergo `Thema1`: `A1` | "$\forall \beta : ((\beta \in E) \wedge (p \subseteq \beta)) \Rightarrow (\beta = p)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta \in E) \wedge (p \subseteq \beta)) \Rightarrow (\beta = p)$"
folgt: $(p \in E) \wedge (\forall \beta : ((\beta \in E) \wedge (p \subseteq \beta)) \Rightarrow (\beta = p))$.

Beweis **68-34**

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \in E) \wedge (\forall \beta : ((\beta \in E) \wedge (p \subseteq \beta)) \Rightarrow (\beta = p)).$

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha \in E) \wedge (p\_sse\_\alpha).$

`2:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `Thema1.1` "$\ldots p\_sse\_\alpha$"
folgt via **68-4**: $p \subseteq \alpha.$

`3:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in E \ldots$",
aus `2` "$p \subseteq \alpha$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \beta : ((\beta \in E) \wedge (p \subseteq \beta)) \Rightarrow (\beta = p)$"
folgt: $\alpha = p.$

`4:` Aus `3` "$\alpha = p$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq p.$

`5.1:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in E \ldots$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in z.$

`5.2:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $p \in z.$

`6:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `4` "$\alpha \subseteq p$",
aus `5.1` "$\alpha \in z$" und
aus `5.2` "$p \in z$"
folgt via **68-4**: $\alpha\_sse\_p.$

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p\_sse\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_sse\_p)\text{”}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in E \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in E) \wedge (p\_sse\_\alpha)) \Rightarrow (\alpha\_sse\_p)$"
folgt via **39-1(Def)**: $p$ ist $sse$_maximales Element von $E$.

□

**68-35.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist und falls $\mu in$ ein $sse$_minimales Element von $E$ ist, dann ist $\mu in$ gleich jedem $p \in E$ mit $p\_sse\_\mu in$:

**68-35(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) $sse$ *InklusionsRelation in* $z$.

$\rightarrow$) $\mu in$ *ist* $sse$*_minimales Element von* $E$.

$\rightarrow$) $p \in E$.

$\rightarrow$) $p\_sse\_\mu in$.

*Dann folgt* "$p = \mu in$".

Beweis **68-35**

1: Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: $sse$ antiSymmetrisch.

2: Aus 1 "$sse$ antiSymmetrisch",
aus $\rightarrow$) "$\mu in$ ist $sse$_minimales Element von $E$",
aus $\rightarrow$) "$p \in E$" und
aus $\rightarrow$) "$p\_sse\_\mu in$"
folgt via **46-4**: $p = \mu in$.

□

**68-36.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist und falls $\mu ax$ ein $sse$_maximales Element von $E$ ist, dann ist $\mu ax$ gleich jedem $p \in E$ mit $\mu ax\_sse\_p$:

**68-36(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

$\rightarrow$) *$\mu ax$ ist $sse$_maximales Element von $E$.*

$\rightarrow$) *$p \in E$.*

$\rightarrow$) *$\mu ax\_sse\_p$.*

*Dann folgt "$p = \mu ax$".*

Beweis **68-36**

1: Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: $sse$ antiSymmetrisch.

2: Aus 1"$sse$ antiSymmetrisch",
aus $\rightarrow$) "$\mu ax$ ist $sse$_maximales Element von $E$",
aus $\rightarrow$) "$p \in E$" und
aus $\rightarrow$) "$\mu ax\_sse\_p$"
folgt via **46-5**: $p = \mu ax$.

□

**68-37.** Falls *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist, dann ist, einer allgemeinen, merkwürdigen Geseztmäßigkeit folgend, im Fall $z \cap E = 0$ jedes Element aus $E$ ein *sse*_minimales *und* ein *sse*_maximales Element von $E$:

**68-37(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in* $z$.

$\rightarrow$) $z \cap E = 0$.

$\rightarrow$) $\mu \in E$.

*Dann folgt:*

a) $\mu$ *ist sse_minimales Element von* $E$.

b) $\mu$ *ist sse_maximales Element von* $E$.

Beweis **68-37**

1: Aus $\rightarrow$)“*sse* InklusionsRelation in $z$”
folgt via **68-6**: *sse* antiSymmetrische Halbordnung in $z$.

2: Aus 1“*sse* antiSymmetrische Halbordnung in $z$”
folgt via **34-13**: *sse* Relation in $z$.

3.a): Aus 1“*sse* Relation in $z$”,
aus $\rightarrow$)“$z \cap E = 0$” und
aus $\rightarrow$)“$\mu \in E$”
folgt via **39-24**: $\mu$ ist *sse*_minimales Element von $E$.

3.b): Aus 1“*sse* Relation in $z$”,
aus $\rightarrow$)“$z \cap E = 0$” und
aus $\rightarrow$)“$\mu \in E$”
folgt via **39-24**: $\mu$ ist *sse*_maximales Element von $E$.

□

**68-38.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist, falls $y \subseteq z$ und falls $q \in y$ eine *echte TeilKlasse* von $p$ ist, dann ist $p$ kein $sse$_minimales Element von $y$:

**68-38(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

$\rightarrow$) $q \in y \subseteq z$.

$\rightarrow$) $q \subset p$.

*Dann folgt "$p$ kein $sse$_minimales Element von $y$".*

Beweis **68-38**

1: Es gilt: $p$ ist $sse$_minimales Element von $y$ $\vee$ $\neg$($p$ ist $sse$_minimales Element von $y$).

Fallunterscheidung

1.1.Fall — $p$ ist $sse$_minimales Element von $y$.

2: Aus $\rightarrow$) "$q \subset p$"
folgt via **57-1(Def)**: $(q \subseteq p) \wedge (q \neq p)$.

3: Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
$\rightarrow$) "$\ldots y \subseteq z$",
aus 1.1.Fall "$p$ ist $sse$_minimales Element von $y$",
aus $\rightarrow$) "$q \in y$" und
aus 2 "$q \subseteq p \ldots$"
folgt via **68-33**: $p = q$.

4: Es gilt 3 "$p = q$".
Es gilt 2 "$\ldots q \neq p$".
Ex falso quodlibet folgt: $p$ kein $sse$_minimales Element von $y$.

1.2.Fall — $\neg$($p$ ist $sse$_minimales Element von $y$).

Aus 1.2.Fall "$\neg$($p$ ist $sse$_minimales Element von $y$)"
folgt via **39-1(Def)**: $p$ kein $sse$_minimales Element von $y$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$p$ kein $sse$_minimales Element von $y$.

$\square$

**68-39.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist, falls $y \subseteq z$ und falls $p$ eine *echte TeilKlasse* von $q \in y$ ist, dann ist $p$ kein $sse$_maximales Element von $y$:

**68-39(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

$\rightarrow$) $q \in y \subseteq z$.

$\rightarrow$) $p \subset q$.

*Dann folgt "$p$ kein $sse$_maximales Element von $y$".*

Beweis **68-39**

1: Es gilt: $p$ ist $sse$_maximales Element von $y$ $\vee$ $\neg$($p$ ist $sse$_maximales Element von $y$).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p$ ist $sse$_maximales Element von $y$.

2: Aus $\rightarrow$) "$p \subset q$"
folgt via **57-1(Def)**: $(p \subseteq q) \wedge (p \neq q)$.

3: Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
$\rightarrow$) "$\ldots y \subseteq z$",
aus `1.1.Fall` "$p$ ist $sse$_maximales Element von $y$",
aus $\rightarrow$) "$q \in y$" und
aus 2 "$p \subseteq q \ldots$"
folgt via **68-34**: $q = p$.

4: Es gilt 3 "$q = p$".
Es gilt 2 "$\ldots p \neq q$".
Ex falso quodlibet folgt: $p$ kein $sse$_maximales Element von $y$.

`1.2.Fall` $\neg$($p$ ist $sse$_maximales Element von $y$).

Aus `1.2.Fall` "$\neg$($p$ ist $sse$_maximales Element von $y$)"
folgt via **39-1(Def)**: $p$ kein $sse$_maximales Element von $y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$p$ kein $sse$_maximales Element von $y$.

$\square$

**68-40.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist, falls $y$ eine TeilKlasse von $z$ ist und falls es zu jedem Element $\alpha$ von $y$ ein weiteres Element von $y$ gibt, das eine *echte TeilKlasse* von $\alpha$ ist, dann hat $y$ kein $sse$_minimales Element:

**68-40(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

$\rightarrow$) $y \subseteq z$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \subset \alpha))$.

*Dann folgt "$y$ hat kein $sse$_minimales Element".*

Beweis **68-40**

1: Es gilt: $\exists\Psi : \Psi$ ist *sse*_minimales Element von $y$
$\vee$
$\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist *sse*_minimales Element von $y)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\exists\Psi : \Psi$ ist *sse*_minimales Element von $y$

2: Aus 1.1.Fall "... $\Psi$ ist *sse*_minimales Element von $y$
folgt via **39-1(Def)**: $\Psi \in y$.

3: Aus 3 "$\Psi \in y$" und
aus →) "$\forall\alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \subset \alpha))$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Omega \subset \Psi)$.

4: Aus →) "*sse* InklusionsRelation in $z$",
aus 3 "... $\Omega \in y$ ...",
aus →) "$y \subseteq z$" und
aus 3 "... $\Omega \subset \Psi$"
folgt via **68-38**: $\Psi$ kein *sse*_minimales Element von $y$.

5: Aus 4
folgt via **39-1(Def)**: $\neg(\Psi$ ist *sse*_minimales Element von $y)$.

6: Es gilt 5 "$\neg(\Psi$ ist *sse*_minimales Element von $y)$".
Es gilt 1.1.Fall "... $\Psi$ ist *sse*_minimales Element von $y$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist *sse*_minimales Element$)$.

1.2.Fall $\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist *sse*_minimales Element von $y)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist *sse*_minimales Element von $y)$.

Konsequenz via **39-1(Def)**: $y$ hat kein *sse*_minimales Element.

□

**68-41.** Falls *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist, falls $y$ eine TeilKlasse von $z$ ist und falls jedes Element von $y$ *echte TeilKlasse* eines weiteren Elementes von $y$ ist, dann hat $y$ kein *sse*_maximales Element:

**68-41(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow)$ *sse InklusionsRelation in* $z$.

$\rightarrow)$ $y \subseteq z$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge (\alpha \subset \Omega))$.

*Dann folgt "$y$ hat kein sse_maximales Element".*

Beweis **68-41**

1: Es gilt: $\exists\Psi : \Psi$ ist $sse$_maximales Element von $y$ $\vee$ $\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist $sse$_maximales Element von $y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Psi : \Psi$ ist $sse$_maximales Element von $y$

2: Aus `1.1.Fall` "… $\Psi$ ist $sse$_maximales Element von $y$
folgt via **39-1(Def)**: $\Psi \in y$.

3: Aus `3` "$\Psi \in y$" und
aus →) "$\forall\alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in y) \wedge (\alpha \subset \Omega))$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \in y) \wedge (\Psi \subset \Omega)$.

4: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `3` "… $\Omega \in y$ …",
aus →) "$y \subseteq z$" und
aus `3` "… $\Psi \subset \Omega$"
folgt via **68-39**: $\Psi$ kein $sse$_maximales Element von $y$.

5: Aus `4`
folgt via **39-1(Def)**: $\neg(\Psi$ ist $sse$_maximales Element von $y)$.

6: Es gilt `5` "$\neg(\Psi$ ist $sse$_maximales Element von $y)$".
Es gilt `1.1.Fall` "… $\Psi$ ist $sse$_maximales Element von $y$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist $sse$_maximales Element$)$.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist $sse$_maximales Element von $y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\neg(\exists\Psi : \Psi$ ist $sse$_maximales Element von $y)$.

Konsequenz via **39-1(Def)**: $y$ hat kein $sse$_maximales Element.

□

**68-42.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist und falls $\bigcup E$ eine Unmenge ist, dann ist $E$ oben $sse$_unbeschränkt:

**68-42(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

$\rightarrow$) *$\bigcup E$ Unmenge.*

*Dann folgt "$E$ oben $sse$_unbeschränkt".*

Beweis **68-42**

`1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega$ obere $sse$_Schranke von $E$ $\vee$ $\neg(\exists\Omega : \Omega$ obere $sse$_Schranke von $E)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega : \Omega$ obere $sse$_Schranke von $E$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"...$\Omega$ obere $sse$_Schranke von $E$" folgt via **35-5**: $\Omega$ Menge.

`2.2:` Aus $\rightarrow$)"$sse$ InklusionsRelation in $z$" und aus `1.1.Fall`"...$\Omega$ obere $sse$_Schranke von $E$" folgt via **68-11**: $\bigcup E \subseteq \Omega$.

`3:` Aus `2.2`"$\bigcup E \subseteq \Omega$" und aus `2.1`"$\Omega$ Menge" folgt via **TeilMengenAxiom**: $\bigcup E$ Menge.

`4:` Es gilt `3`"$\bigcup E$ Menge".
Es gilt $\rightarrow$)"$\bigcup E$ Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(\exists\Omega : \Omega$ obere $sse$_Schranke von $E)$.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Omega : \Omega$ obere $sse$_Schranke von $E)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(\exists\Omega : \Omega$ obere $sse$_Schranke von $E)$.

Konsequenz via **35-1(Def)**: $E$ oben $sse$_unbeschränkt.

□

**68-43.** Es folgt Hinreichendes für "$w$ ist $sse$_vermehrend auf $E$", wobei hier $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist:

**68-43(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *$sse$ InklusionsRelation in $z$.*

$\rightarrow$) $E \subseteq z$.

$\rightarrow$) $\mathsf{ran}\, w \subseteq z$.

$\rightarrow$) $E \subseteq \mathsf{dom}\, w$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\alpha \subseteq \beta)$.

*Dann folgt "$w$ ist $sse$_vermehrend auf $E$".*

Beweis **68-43**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\gamma \in E$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in E$" und
aus →) "$E \subseteq \mathsf{dom}\, w$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \mathsf{dom}\, w$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in E$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in z$.

`3:` Aus `2.1`"$\gamma \in \mathsf{dom}\, w$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{ran}\, w) \wedge ((\gamma, \Omega) \in w)$.

`4.1:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathsf{ran}\, w \ldots$" und
aus →) "$\mathsf{ran}\, w \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in z$.

`4.2:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in E$" ,
aus `3`"$\ldots (\gamma, \Omega) \in w$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\alpha \subseteq \beta)$"
folgt: $\gamma \subseteq \Omega$.

`5:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" ,
aus `4.2`"$\gamma \subseteq \Omega$" ,
aus `2.2`"$\gamma \in z$" und
aus `4.1`"$\Omega \in z$"
folgt via **68-4**: $\gamma\_sse\_\Omega$.

`6:` Aus `3`"$\exists \Omega \ldots$" ,
aus `3`"$\ldots (\gamma, \Omega) \in w$" und
aus `5`"$\gamma\_sse\_\Omega$"
folgt: $\exists \Omega : ((\gamma, \Omega) \in w) \wedge (\gamma\_sse\_\Omega)$.

Ergo `Thema1.1`:

| `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\gamma, \Omega) \in w) \wedge (\gamma\_sse\_\Omega))$" |
|---|---|

...

Beweis **68-43**

| | |
|---|---|
| `Thema1.2` | $(\gamma \in E) \wedge ((\gamma, \delta) \in w)$. |
| `2.1:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in E \ldots$” und<br>aus →) “$E \subseteq z$”<br>folgt via **0-4**: | $\gamma \in z$. |
| `2.2:` Aus `Thema1.2`“$\ldots (\gamma, \delta) \in w$”<br>folgt via **7-5**: | $\delta \in \mathsf{ran}\, w$. |
| `2.3:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in E \ldots$”,<br>aus `Thema1.2`“$\ldots (\gamma, \delta) \in w$” und<br>aus →) “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\alpha \subseteq \beta)$”<br>folgt: | $\gamma \subseteq \delta$. |
| `3:` Aus `2.2`“$\delta \in \mathsf{ran}\, w$” und<br>aus →) “$\mathsf{ran}\, w \subseteq z$”<br>folgt via **0-4**: | $\delta \in z$. |
| `4:` Aus →) “*sse* InklusionsRelation in $z$”,<br>aus `2.3`“$\gamma \subseteq \delta$”,<br>aus `2.1`“$\gamma \in z$” und<br>aus `3`“$\delta \in z$”<br>folgt via **68-4**: | $\gamma\_sse\_\delta$. |

Ergo `Thema1.2`:

`A2` | “$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in E) \wedge ((\gamma, \delta) \in w)) \Rightarrow (\gamma\_sse\_\delta)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\gamma, \Omega) \in w) \wedge (\gamma\_sse\_\Omega))$” und
aus `A2` gleich “$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in E) \wedge ((\gamma, \delta) \in w)) \Rightarrow (\gamma\_sse\_\delta)$”
folgt via **30-7(Def)**: $w$ ist *sse*_vermehrend auf $E$.

□

**68-44.** Es folgt Hinreichendes für “$w$ ist $sse$_verringernd auf $E$” , wobei hier $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist:

**68-44(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in z.*

$\rightarrow$) $E \subseteq z$.

$\rightarrow$) $\mathsf{ran}\, w \subseteq z$.

$\rightarrow$) $E \subseteq \mathsf{dom}\, w$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\beta \subseteq \alpha)$.

*Dann folgt “w ist sse_verringernd auf E”.*

Beweis **68-44**

`Thema1.1` $\gamma \in E.$

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in E$" und
aus →)"$E \subseteq \mathsf{dom}\, w$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \mathsf{dom}\, w.$

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in E$" und
aus →)"$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in z.$

`3:` Aus `2.1`"$\gamma \in \mathsf{dom}\, w$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{ran}\, w) \wedge ((\gamma, \Omega) \in w).$

`4.1:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathsf{ran}\, w \ldots$" und
aus →)"$\mathsf{ran}\, w \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in z.$

`4.2:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in E$" ,
aus `3`"$\ldots (\gamma, \Omega) \in w$" und
aus →)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\beta \subseteq \alpha)$"
folgt: $\Omega \subseteq \gamma.$

`5:` Aus →)"$sse$ InklusionsRelation in $z$" ,
aus `4.2`"$\Omega \subseteq \gamma$" ,
aus `4.1`"$\Omega \in z$" und
aus `2.2`"$\gamma \in z$"
folgt via **68-4**: $\Omega\_sse\_\gamma.$

`6:` Aus `3`"$\exists \Omega \ldots$" ,
aus `3`"$\ldots (\gamma, \Omega) \in w$" und
aus `5`"$\Omega\_sse\_\gamma$"
folgt: $\exists \Omega : ((\gamma, \Omega) \in w) \wedge (\Omega\_sse\_\gamma).$

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\gamma, \Omega) \in w) \wedge (\Omega\_sse\_\gamma))$"

...

<u>Beweis **68-44**</u>

`Thema1.2` $(\gamma \in E) \wedge ((\gamma, \delta) \in w)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in E \dots$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in z$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\dots (\gamma, \delta) \in w$"
folgt via **7-5**: $\delta \in \mathsf{ran}\, w$.

`2.3:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in E \dots$",
aus `Thema1.2`"$\dots (\gamma, \delta) \in w$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in w)) \Rightarrow (\beta \subseteq \alpha)$"
folgt: $\delta \subseteq \gamma$.

`3:` Aus `2.2`"$\delta \in \mathsf{ran}\, w$" und
aus →) "$\mathsf{ran}\, w \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\delta \in z$.

`4:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `2.3`"$\delta \subseteq \gamma$",
aus `3`"$\delta \in z$" und
aus `2.1`"$\gamma \in z$"
folgt via **68-4**: $\delta\_sse\_\gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

| `A2` | "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in E) \wedge ((\gamma, \delta) \in w)) \Rightarrow (\delta\_sse\_\gamma)$" |
|---|---|

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in E) \Rightarrow (\exists \Omega : ((\gamma, \Omega) \in w) \wedge (\Omega\_sse\_\gamma))$" und
aus `A2` gleich "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma \in E) \wedge ((\gamma, \delta) \in w)) \Rightarrow (\delta\_sse\_\gamma)$"
folgt via **30-7(Def)**: $w$ ist $sse$_verringernd auf $E$.

□

**68-45.** Es folgt Hinreichendes dafür, dass eine *Funktion* $f$ die Eigenschaft hat, *sse*_vermehrend auf $E$ zu sein, wobei hier *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist:

**68-45(Satz)**

*Es gelte:*

→) *sse InklusionsRelation in* $z$.

→) $E \subseteq z$.

→) $f$ *Funktion.*

→) $\mathsf{ran}\, f \subseteq z$.

→) $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

→) $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq f(\alpha))$.

*Dann folgt "$f$ ist sse_vermehrend auf $E$".*

Beweis **68-45**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in E$.

`2.1`: Aus `Thema1.1` "$\beta \in E$" und
aus →) "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

`2.2`: Aus `Thema1.1` "$\beta \in E$" und
aus →) "$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\beta \in z$.

`2.3`: Aus `Thema1.1` "$\beta \in E$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq f(\alpha))$"
folgt: $\beta \subseteq f(\beta)$.

`3`: Aus →) "$f$ Funktion" und
aus `2.1` "$\beta \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $f(\beta) \in \mathsf{ran}\, f$.

`4`: Aus `3` "$f(\beta) \in \mathsf{ran}\, f$" und
aus →) "$\mathsf{ran}\, f \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $f(\beta) \in z$.

`5`: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `2.3` "$\beta \subseteq f(\beta)$",
aus `2.2` "$\beta \in z$" und
aus `4` "$f(\beta) \in z$"
folgt via **68-4**: $\beta\_sse\_f(\beta)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta\_sse\_f(\beta))$"

`1.2`: Aus →) "$f$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta\_sse\_f(\beta))$"
folgt via **30-15**: $f$ ist $sse$_vermehrend auf $E$.

□

**68-46.** Es folgt Hinreichendes dafür, dass eine *Funktion* $f$ die Eigenschaft hat, *sse*_verringernd auf $E$ zu sein, wobei hier *sse* die InklusionsRelation in $z$ ist:

**68-46(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in* $z$.

$\rightarrow$) $E \subseteq z$.

$\rightarrow$) $f$ *Funktion.*

$\rightarrow$) $\mathsf{ran}\, f \subseteq z$.

$\rightarrow$) $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \subseteq \alpha)$.

*Dann folgt "$f$ ist sse_verringernd auf $E$".*

<u>Beweis **68-46**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in E$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in E$" und
aus →)"$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in E$" und
aus →)"$E \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $\beta \in z$.

`2.3:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in E$" und
aus →)"$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \subseteq \alpha)$"
folgt: $f(\beta) \subseteq \beta$.

`3:` Aus →)"$f$ Funktion" und
aus `2.1`"$\beta \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $f(\beta) \in \mathsf{ran}\, f$.

`4:` Aus `3`"$f(\beta) \in \mathsf{ran}\, f$" und
aus →)"$\mathsf{ran}\, f \subseteq z$"
folgt via **0-4**: $f(\beta) \in z$.

`5:` Aus →)"$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `2.3`"$f(\beta) \subseteq \beta$",
aus `4`"$f(\beta) \in z$" und
aus `2.2`"$\beta \in z$"
folgt via **68-4**: $f(\beta)\_sse\_\beta$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (f(\beta)\_sse\_\beta)$"

`1.2:` Aus →)"$f$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (f(\beta)\_sse\_\beta)$"
folgt via **30-16**: $f$ ist $sse$_verringernd auf $E$.

□

**68-47.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist und falls $f : z \to z$, so dass für alle $\alpha \in z$ die Inklusion $\alpha \subseteq f(\alpha)$ gilt, dann ist $f$ eine $sse$_vermehrende Funktion auf $z$:

**68-47(Satz)**

*Es gelte:*

$\to$) $sse$ *InklusionsRelation in* $z$.

$\to$) $f : z \to z$.

$\to$) $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha \subseteq f(\alpha))$.

*Dann folgt "$f$ ist $sse$_vermehrend auf $z$".*

Beweis **68-47**

1.1: Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

1.2: Aus $\to$) "$f : z \to z$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = z) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq z)$.

2: Aus 1.2 "$\ldots \mathsf{dom}\, f = z \ldots$"
folgt via **0-6**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus $\to$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus 1.1 "$z \subseteq z$",
aus 1.2 "$f$ Funktion…",
aus 1.2 "$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq z$",
aus 2 "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus $\to$) "$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha \subseteq f(\alpha))$"
folgt via **68-45**: $f$ ist $sse$_vermehrend auf $z$.

□

**68-48.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist und falls $f : z \to z$, so dass für alle $\alpha \in z$ die Inklusion $f(\alpha) \subseteq \alpha$ gilt, dann ist $f$ eine $sse$_verringernde Funktion auf $z$:

**68-48(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in $z$.*

$\rightarrow$) $f : z \to z$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (f(\alpha) \subseteq \alpha)$.

*Dann folgt "$f$ ist $sse$_verringernd auf $z$".*

Beweis **68-48**

1.1: Via **0-6** gilt: $z \subseteq z$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "$f : z \to z$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = z) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq z)$.

2: Aus 1.2"$\ldots \mathsf{dom}\, f = z \ldots$"
folgt via **0-6**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

4: Aus $\rightarrow$) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus 1.1"$z \subseteq z$",
aus 1.2"$f$ Funktion…",
aus 1.2"$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq z$",
aus 3"$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus $\rightarrow$) "$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (f(\alpha) \subseteq \alpha)$"
folgt via **68-46**: $f$ ist $sse$_verringernd auf $z$.

$\square$

**68-49.** Im folgenden Satz sind Kriterien über die Zugehörigkeit zu $sse$_Intervallen, wenn $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist, zusammengefassst:

**68-49(Satz)**

*Aus "sse InklusionsRelation in z" und ...*

a) ... *und* "$p \in [a \overset{sse}{|} b]$"
*folgt* "$a \subseteq p \subseteq b$" *und* "$a \in z$" *und* "$p \in z$" *und* "$b \in z$".

b) ... *und* "$a \subseteq p \subseteq b$" *und* "$a \in z$" *und* "$p \in z$" *und* "$b \in z$"
*folgt* "$p \in [a \overset{sse}{|} b]$".

c) ... *und* "$p \in ]a \overset{sse}{|} b[$"
*folgt* "$a \subset p \subset b$" *und* "$a \in z$" *und* "$p \in z$" *und* "$b \in z$".

d) ... *und* "$a \subset p \subset b$" *und* "$a \in z$" *und* "$p \in z$" *und* "$b \in z$"
*folgt* "$p \in ]a \overset{sse}{|} b[$".

e) ... *und* "$p \in ]a \overset{sse}{|} b]$"
*folgt* "$a \subset p \subseteq b$" *und* "$a \in z$" *und* "$p \in z$" *und* "$b \in z$".

f) ... *und* "$a \subset p \subseteq b$" *und* "$a \in z$" *und* "$p \in z$" *und* "$b \in z$"
*folgt* "$p \in ]a \overset{sse}{|} b]$".

g) ... *und* "$p \in [a \overset{sse}{|} b[$"
*folgt* "$a \subseteq p \subset b$" *und* "$a \in z$" *und* "$p \in z$" *und* "$b \in z$".

h) ... *und* "$a \subseteq p \subset b$" *und* "$a \in z$" *und* "$p \in z$" *und* "$b \in z$"
*folgt* "$p \in [a \overset{sse}{|} b[$".

...

...

**68-49(Satz)**

*Aus "sse InklusionsRelation in z" und ...*

...

i) ... *und* "$p \in [a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$" *folgt* "$a \subseteq p$" *und* "$a \in z$" *und* "$p \in z$".

j) ... *und* "$a \subseteq p$" *und* "$a \in z$" *und* "$p \in z$" *folgt* "$p \in [a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$".

k) ... *und* "$p \in ]a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$" *folgt* "$a \subset p$" *und* "$a \in z$" *und* "$p \in z$".

l) ... *und* "$a \subset p$" *und* "$a \in z$" *und* "$p \in z$" *folgt* "$p \in ]a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$".

m) ... *und* "$p \in \langle\cdot \overset{sse}{|} b]$" *folgt* "$p \subseteq b$" *und* "$p \in z$" *und* "$b \in z$".

n) ... *und* "$p \subseteq b$" *und* "$p \in z$" *und* "$b \in z$" *folgt* "$p \in \langle\cdot \overset{sse}{|} b]$".

o) ... *und* "$p \in \langle\cdot \overset{sse}{|} b[$" *folgt* "$p \subset b$" *und* "$p \in z$" *und* "$b \in z$".

p) ... *und* "$p \subset b$" *und* "$p \in z$" *und* "$b \in z$" *folgt* "$p \in \langle\cdot \overset{sse}{|} b[$".

q) ... *und* "$p \in \langle\cdot \overset{sse}{|} \cdot\rangle$" *folgt* "$p \in z$".

r) ... *und* "$p \in z$" *folgt* "$p \in \langle\cdot \overset{sse}{|} \cdot\rangle$".

Beweis **68-49** `a)` `VS` gleich $p \in [a \overset{sse}{|} b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in [a \overset{sse}{|} b]$"
folgt via **41-25**: $(a\_sse\_p) \wedge (p\_sse\_b)$.

`2.1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `1`"$a\_sse\_p\ldots$"
folgt via **68-4**: $(a \subseteq p) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z)$.

`2.2:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `1`"$\ldots p\_sse\_b$"
folgt via **68-4**: $(p \subseteq b) \wedge (b \in z)$.

`3:` Aus `2.1`"$a \subseteq p\ldots$" und
aus `2.2`"$p \subseteq b\ldots$"
folgt: $a \subseteq p \subseteq b$.

`4:` Aus `3`"$a \subseteq p \subseteq b$",
aus `2.1`"$\ldots a \in z\ldots$",
aus `2.1`"$\ldots p \in z$" und
aus `2.2`"$\ldots b \in z$"
folgt: $(a \subseteq p \subseteq b) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z) \wedge (b \in z)$.

`b)` `VS` gleich $(a \subseteq p \subseteq b) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z) \wedge (b \in z)$.

`1.1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$a \subseteq p\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \in z\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in z\ldots$"
folgt via **68-4**: $a\_sse\_p$.

`1.2:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \subseteq b$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \in z\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in z$"
folgt via **68-4**: $p\_sse\_b$.

`2:` Aus `1.1`"$a\_sse\_p$" und
aus `1.2`"$p\_sse\_b$"
folgt via **41-25**: $p \in [a \overset{sse}{|} b]$.

<u>Beweis **68-49**</u> `c)` `VS` gleich $p \in ]a \overset{sse}{|} b[$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in ]a \overset{sse}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $(a\_ \overset{\mathbf{ir}}{sse} \_p) \wedge (p\_ \overset{\mathbf{ir}}{sse} \_b)$.

`2.1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `1`"$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{sse} \_p \ldots$"
folgt via **68-5**: $(a \subset p) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z)$.

`2.2:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `1`"$\ldots p\_ \overset{\mathbf{ir}}{sse} \_b$"
folgt via **68-5**: $(p \subset b) \wedge (b \in z)$.

`3:` Aus `2.1`"$a \subset p \ldots$" und
aus `2.2`"$p \subset b \ldots$"
folgt: $a \subset p \subset b$.

`4:` Aus `3`"$a \subset p \subset b$",
aus `2.1`"$\ldots a \in z \ldots$",
aus `2.1`"$\ldots p \in z$" und
aus `2.2`"$\ldots b \in z$"
folgt: $(a \subset p \subset b) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z) \wedge (b \in z)$.

`d)` `VS` gleich $(a \subset p \subset b) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z) \wedge (b \in z)$.

`1.1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$a \subset p \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in z \ldots$"
folgt via **68-5**: $a\_ \overset{\mathbf{ir}}{sse} \_p$.

`1.2:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \subset b$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in z$"
folgt via **68-5**: $p\_ \overset{\mathbf{ir}}{sse} \_b$.

`2:` Aus `1.1`"$a\_ \overset{\mathbf{ir}}{sse} \_p$" und
aus `1.2`"$p\_ \overset{\mathbf{ir}}{sse} \_b$"
folgt via **41-25**: $p \in ]a \overset{sse}{|} b[$.

Beweis **68-49** `e)` `VS` gleich $p \in \left]a \overset{sse}{|} b\right]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \left]a \overset{sse}{|} b\right]$"
folgt via **41-25**: $(a \_ \overset{\mathbf{ir}}{sse} \_ p) \wedge (p \_ sse \_ b)$.

`2.1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `1` "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{sse} \_ p \ldots$"
folgt via **68-5**: $(a \subset p) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z)$.

`2.2:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `1` "$\ldots p \_ sse \_ b$"
folgt via **68-4**: $(p \subseteq b) \wedge (b \in z)$.

`3:` Aus `2.1` "$a \subset p \ldots$" und
aus `2.2` "$p \subseteq b \ldots$"
folgt: $a \subset p \subseteq b$.

`4:` Aus `3` "$a \subset p \subseteq b$",
aus `2.1` "$\ldots a \in z \ldots$",
aus `2.1` "$\ldots p \in z$" und
aus `2.2` "$\ldots b \in z$"
folgt: $(a \subset p \subseteq b) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z) \wedge (b \in z)$.

`f)` `VS` gleich $(a \subset p \subseteq b) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z) \wedge (b \in z)$.

`1.1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$a \subset p \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in z \ldots$"
folgt via **68-5**: $a \_ \overset{\mathbf{ir}}{sse} \_ p$.

`1.2:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \subseteq b$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in z$"
folgt via **68-4**: $p \_ sse \_ b$.

`2:` Aus `1.1` "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{sse} \_ p$" und
aus `1.2` "$p \_ sse \_ b$"
folgt via **41-25**: $p \in \left]a \overset{sse}{|} b\right]$.

<u>Beweis **68-49**</u> `g)` `VS` gleich $p \in [a \overset{sse}{|} b[$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in [a \overset{sse}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $(a\_sse\_p) \wedge (p\_ \overset{\mathbf{ir}}{sse}\ \_b)$.

`2.1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `1` "$a\_sse\_p \ldots$"
folgt via **68-4**: $(a \subseteq p) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z)$.

`2.2:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `1` "$\ldots p\_ \overset{\mathbf{ir}}{sse}\ \_b$"
folgt via **68-5**: $(p \subset b) \wedge (b \in z)$.

`3:` Aus `2.1` "$a \subseteq p \ldots$" und
aus `2.2` "$p \subset b \ldots$"
folgt: $a \subseteq p \subset b$.

`4:` Aus `3` "$a \subseteq p \subset b$",
aus `2.1` "$\ldots a \in z \ldots$",
aus `2.1` "$\ldots p \in z$" und
aus `2.2` "$\ldots b \in z$"
folgt: $(a \subseteq p \subset b) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z) \wedge (b \in z)$.

`h)` `VS` gleich $(a \subseteq p \subset b) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z) \wedge (b \in z)$.

`1.1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$a \subseteq p \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in z \ldots$"
folgt via **68-4**: $a\_sse\_p$.

`1.2:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \subset b$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in z$"
folgt via **68-5**: $p\_ \overset{\mathbf{ir}}{sse}\ \_b$.

`2:` Aus `1.1` "$a\_sse\_p$" und
aus `1.2` "$p\_ \overset{\mathbf{ir}}{sse}\ \_b$"
folgt via **41-25**: $p \in [a \overset{sse}{|} b[$.

Beweis **68-49** `i)` `VS` gleich $p \in [a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in [a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: $a\_sse\_p$.

`2:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `1` "$a\_sse\_p \ldots$"
folgt via **68-4**: $(a \subseteq p) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z)$.

`j)` `VS` gleich $(a \subseteq p) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z)$.

`1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$a \subseteq p \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in z$"
folgt via **68-4**: $a\_sse\_p$.

`2:` Aus `1` "$a\_sse\_p$"
folgt via **41-25**: $p \in [a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$.

`k)` `VS` gleich $p \in ]a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in ]a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **41-25**: $a\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_p$.

`2:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus `1` "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_p \ldots$"
folgt via **68-5**: $(a \subset p) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z)$.

`l)` `VS` gleich $(a \subset p) \wedge (a \in z) \wedge (p \in z)$.

`1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$a \subset p \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \in z \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in z$"
folgt via **68-5**: $a\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_p$.

`2:` Aus `1` "$a\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_p$"
folgt via **41-25**: $p \in ]a \overset{sse}{|} \cdot\rangle$.

<u>Beweis **68-49**</u> `m)` `VS` gleich $p \in \langle\cdot \overset{sse}{|} b]$.

1: Aus `VS` gleich "$p \in \langle\cdot \overset{sse}{|} a]$"
folgt via **41-25**: $p\_sse\_b$.

2: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus 1 "$p\_sse\_b\ldots$"
folgt via **68-4**: $(p \subseteq b) \wedge (p \in z) \wedge (b \in z)$.

`n)` `VS` gleich $(p \subseteq b) \wedge (p \in z) \wedge (b \in z)$.

1: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$p \subseteq b\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \in z\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in z$"
folgt via **68-4**: $p\_sse\_b$.

2: Aus 1 "$p\_sse\_b$"
folgt via **41-25**: $p \in \langle\cdot \overset{sse}{|} b]$.

`o)` `VS` gleich $p \in \langle\cdot \overset{sse}{|} b[$.

1: Aus `VS` gleich "$p \in \langle\cdot \overset{sse}{|} b[$"
folgt via **41-25**: $p\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_b$.

2: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$" und
aus 1 "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_b\ldots$"
folgt via **68-5**: $(p \subset b) \wedge (p \in z) \wedge (b \in z)$.

`p)` `VS` gleich $(p \subset b) \wedge (p \in z) \wedge (b \in z)$.

1: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$",
aus `VS` gleich "$p \subset b\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \in z\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in z$"
folgt via **68-5**: $p\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_b$.

2: Aus 1 "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{sse}\_b$"
folgt via **41-25**: $p \in \langle\cdot \overset{sse}{|} b[$.

<u>Beweis **68-49**</u> `q)` `VS` gleich $p \in \langle \cdot \overset{sse}{|} \cdot \rangle$.

`1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: $sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$.

`2:` Aus `1` "$sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-13**: $(sse \text{ Relation in } z) \wedge (sse \text{ reflexiv in } z)$.

`3:` Aus `2` "$sse$ Relation in $z \ldots$" und
aus `2` "$\ldots sse$ reflexiv in $z$"
folgt via **43-23**: $\langle \cdot \overset{sse}{|} \cdot \rangle = z$.

`4:` Aus `VS` gleich "$p \in \langle \cdot \overset{sse}{|} \cdot \rangle$" und
aus `3` "$\langle \cdot \overset{sse}{|} \cdot \rangle = z$"
folgt: $p \in z$.

`r)` `VS` gleich $p \in z$.

`1:` Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: $sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$.

`2:` Aus `1` "$sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-13**: $(sse \text{ Relation in } z) \wedge (sse \text{ reflexiv in } z)$.

`3:` Aus `2` "$sse$ Relation in $z \ldots$" und
aus `2` "$\ldots sse$ reflexiv in $z$"
folgt via **43-23**: $\langle \cdot \overset{sse}{|} \cdot \rangle = z$.

`4:` Aus `VS` gleich "$p \in z$" und
aus `3` "$\langle \cdot \overset{sse}{|} \cdot \rangle = z$"
folgt: $p \in \langle \cdot \overset{sse}{|} \cdot \rangle$.

□

**68-50.** Falls $sse$ die InklusionsRelation in $z$ ist, dann gilt $\langle\cdot \overset{sse}{|} \cdot\rangle = z$:

**68-50(Satz)**

*Aus "$sse$ InklusionsRelation in $z$" folgt "$\langle\cdot \overset{sse}{|} \cdot\rangle = z$".*

Beweis **68-50**

1: Aus →) "$sse$ InklusionsRelation in $z$"
folgt via **68-6**: $sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$.

2: Aus 1 "$sse$ antiSymmetrische Halbordnung in $z$"
folgt via **34-13**: ($sse$ Relation in $z$) $\wedge$ ($sse$ reflexiv in $z$).

3: Aus 2 "$sse$ Relation in $z \ldots$" und
aus 2 "$\ldots sse$ reflexiv in $z$"
folgt via **43-23**: $\langle\cdot \overset{sse}{|} \cdot\rangle = z$.

□

InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$.

**Ersterstellung: 13/06/07** **Letzte Änderung: 06/06/11**

**69-1.** Die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ist genau die universelle InklusionsRelation:

**69-1(Satz)**

a) sse *InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

b) "$\mathfrak{C}$ *InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(\mathcal{U})$" *genau dann, wenn* "$\mathfrak{C}$ *universelle InklusionsRelation*".

c) "*ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(\mathcal{U})$" *genau dann, wenn* "$ssp =$ sse ".

Beweis **69-1** a)

1: Via **68-2** gilt: sse InklusionsRelation in $\mathcal{U}$.

2: Via **0-28** gilt: $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

3: Aus 1"sse InklusionsRelation in $\mathcal{U}$" und aus 2"$\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$" folgt: sse InklusionsRelation in $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

b)

1.1: Via **68-2** gilt: ($\mathfrak{C}$ InklusionsRelation in $\mathcal{U}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathfrak{C}$ universelle InklusionsRelation).

1.2: Via **0-28** gilt: $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

2: Aus 1.1"($\mathfrak{C}$ InklusionsRelation in $\mathcal{U}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathfrak{C}$ universelle InklusionsRelation)" und aus 1.2"$\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$" folgt: ($\mathfrak{C}$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(\mathcal{U})$) $\Leftrightarrow$ ($\mathfrak{C}$ universelle InklusionsRelation).

c)

1.1: Via **68-2** gilt: ($ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{U}$) $\Leftrightarrow$ ($ssp =$ sse ).

1.2: Via **0-28** gilt: $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

2: Aus 1.1"($ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{U}$) $\Leftrightarrow$ ($ssp =$ sse )" und aus 1.2"$\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$" folgt: ($ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(\mathcal{U})$) $\Leftrightarrow$ ($ssp =$ sse ).

□

**69-2.** Es folgen einige Aussagen über Elemente der InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$:

<u>**69-2(Satz)**</u>

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

$\rightarrow$) $w \in ssp$.

*Dann gibt es* $\Omega, \Psi$, *so dass gilt:*

`e.1)` $(\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega \textit{ Menge})$.

`e.2)` $(\Psi \subseteq x) \wedge (\Psi \textit{ Menge})$.

`e.3)` $\Omega \subseteq \Psi$.

`e.4)` $w = (\Omega, \Psi)$.

<u>Beweis **69-2**</u>

`1:` Aus $\rightarrow$)"$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus $\rightarrow$)"$w \in ssp$"
folgt via **68-3**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \mathcal{P}(x)) \wedge (\Psi \in \mathcal{P}(x)) \wedge (\Omega \subseteq \Psi) \wedge (w = (\Omega, \Psi)).$$

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathcal{P}(x) \ldots$"
folgt via **0-26**: $(\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega \text{ Menge})$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Psi \in \mathcal{P}(x) \ldots$"
folgt via **0-26**: $(\Psi \subseteq x) \wedge (\Psi \text{ Menge})$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega, \Psi \ldots$",
aus `2.1`"$(\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega \text{ Menge})$",
aus `2.2`"$(\Psi \subseteq x) \wedge (\Psi \text{ Menge})$",
aus `1`"$\ldots \Omega \subseteq \Psi \ldots$" und
aus `1`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$"
folgt:
$$\begin{array}{r} \exists \Omega, \Psi: \\ (\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega \text{ Menge}) \\ \wedge \quad (\Psi \subseteq x) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \\ \wedge \quad \Omega \subseteq \Psi \\ \wedge \quad w = (\Omega, \Psi). \end{array}$$

□

**69-3.** Im folgenden Satz werden Kriterien für $p\_ssp\_q$, wobei $ssp$ die Inklusions-Relation in $\mathcal{P}(x)$ ist, gegeben:

**69-3(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

*... sind die Aussagen* i), ii), iii), iv) *äquivalent:*

i) $p\_ssp\_q$.

ii) "$p \mathsf{\ sse\ } q$" *und* "$p \subseteq x$" *und* "$q \subseteq x$".

iii) "$p \subseteq q$" *und* "$p$ *Menge*" *und* "$q$ *Menge*" *und* "$p \subseteq x$" *und* "$q \subseteq x$".

iv) "$p \subseteq q \subseteq x$" *und* "$q$ *Menge*".

---

**sse-Notation**.

Beweis **69-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $p\_ssp\_q$.

1: Aus $\rightarrow$)"$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus VS gleich "$p\_ssp\_q$"
folgt via **68-4**: $(p \mathsf{\ sse\ } q) \wedge (p \in \mathcal{P}(x)) \wedge (q \in \mathcal{P}(x))$.

2.1: Aus 1"$\ldots p \in \mathcal{P}(x) \ldots$"
folgt via **0-26**: $p \subseteq x$.

2.2: Aus 1"$\ldots q \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-26**: $q \subseteq x$.

3: Aus 1"$p \mathsf{\ sse\ } q \ldots$",
aus 2.1"$p \subseteq x$" und
aus 2.2"$q \subseteq x$"
folgt: $(p \mathsf{\ sse\ } q) \wedge (p \subseteq x) \wedge (q \subseteq x)$.

Beweis **69-3** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ VS gleich $(p \,\mathsf{sse}\, q) \wedge (p \subseteq x) \wedge (q \subseteq x)$.

1: Aus VS gleich "$p \,\mathsf{sse}\, q \ldots$"
folgt via **61-4**: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq q)$.

2: Aus 1"$\ldots p \subseteq q$",
aus 1"$p$ Menge...",
aus 1"$\ldots q$ Menge...",
aus VS gleich "$\ldots p \subseteq x \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots q \subseteq x$"
folgt: $(p \subseteq q) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq x) \wedge (q \subseteq x)$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ VS gleich $(p \subseteq q) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq x) \wedge (q \subseteq x)$.

1: Aus VS gleich "$p \subseteq q \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots q \subseteq x$"
folgt: $p \subseteq q \subseteq x$.

2: Aus 1"$p \subseteq q \subseteq x$" und
aus VS gleich "$\ldots q$ Menge..."
folgt: $(p \subseteq q \subseteq x) \wedge (q \text{ Menge})$.

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $(p \subseteq q \subseteq x) \wedge (q \text{ Menge})$.

1.1: Aus VS gleich "$p \subseteq q \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots q \subseteq x \ldots$"
folgt via **0-6**: $p \subseteq x$.

1.2: Aus VS gleich "$p \subseteq q \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots q$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $p$ Menge.

1.3: Aus VS gleich "$\ldots q \subseteq x \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots q$ Menge"
folgt via **0-26**: $q \in \mathcal{P}(x)$.

2: Aus 1.1"$p \subseteq x$" und
aus 1.2"$p$ Menge"
folgt via **0-26**: $p \in \mathcal{P}(x)$.

3: Aus →)"*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$",
aus VS gleich "$p \subseteq q \ldots$",
aus 2"$p \in \mathcal{P}(x)$" und
aus 1.3"$q \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-4**: $p\_ssp\_q$.

□

**69-4.** Im folgenden Satz werden Kriterien für $p\_\overset{\mathbf{ir}}{ssp}\_q$, wobei $ssp$ die Inklusions-Relation in $\mathcal{P}(x)$ ist, gegeben:

**69-4(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

→) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

... *sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` $p\_\overset{\mathbf{ir}}{ssp}\_q$.

`ii)` "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q$" *und* "$p \subseteq x$" *und* "$q \subseteq x$".

`iii)` "$p \subset q$" *und* "$p$ *Menge*" *und* "$q$ *Menge*" *und* "$p \subseteq x$" *und* "$q \subseteq x$".

`iv)` "$p \subset q \subseteq x$" *und* "$q$ *Menge*".

---

**sse-Notation**.

Beweis **69-4** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p\_\overset{\mathbf{ir}}{ssp}\_q$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{ssp}\_q$"
folgt via **41-3**: $(p\_ssp\_q) \wedge (p \neq q)$.

`2:` Aus →) "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus `1` "$p\_ssp\_q \dots$"
folgt via **69-3**: $(p \;\mathsf{sse}\; q) \wedge (p \subseteq x) \wedge (q \subseteq x)$.

`3:` Aus `2` "$p \;\mathsf{sse}\; q \dots$" und
aus `1` "$\dots p \neq q$"
folgt via **41-3**: $p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q$.

`4:` Aus `3` "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q$",
aus `2` "$\dots p \subseteq x \dots$" und
aus `2` "$\dots q \subseteq x$"
folgt: $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q) \wedge (p \subseteq x) \wedge (q \subseteq x)$.

<u>Beweis **69-4**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q) \wedge (p \subseteq x) \wedge (q \subseteq x)$.

1: Aus VS gleich "$p\_\overset{\mathbf{ir}}{\mathsf{sse}}\_q \ldots$"
folgt via **61-6**: $(p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subset q)$.

2: Aus 1"$\ldots p \subset q$",
aus 1"$p$ Menge…",
aus 1"$\ldots q$ Menge…",
aus VS gleich "$\ldots p \subseteq x \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots q \subseteq x$"
folgt: $(p \subset q) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq x) \wedge (q \subseteq x)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $(p \subset q) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (q \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq x) \wedge (q \subseteq x)$.

1: Aus VS gleich "$p \subset q \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots q \subseteq x$"
folgt: $p \subset q \subseteq x$.

2: Aus 1"$p \subset q \subseteq x$" und
aus VS gleich "$\ldots q$ Menge…"
folgt: $(p \subset q \subseteq x) \wedge (q \text{ Menge})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(p \subset q \subseteq x) \wedge (q \text{ Menge})$.

1: Aus VS gleich "$p \subset q \ldots$"
folgt via **57-1(Def)**: $(p \subseteq q) \wedge (p \neq q)$.

2: Aus 1"$p \subseteq q \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots q \subseteq x \ldots$"
folgt: $p \subseteq q \subseteq x$.

3: Aus →)"$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$",
aus 2"$p \subseteq q \subseteq x$" und
aus VS gleich "$\ldots q$ Menge"
folgt via **69-3**: $p\_ssp\_q$.

4: Aus 3"$p\_ssp\_q$" und
aus 1"$\ldots p \neq q$"
folgt via **41-3**: $p\_\overset{\mathbf{ir}}{ssp}\_q$.

□

**69-5.** Falls $ssp$ die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist und falls $x$ eine Menge ist, dann stellt sich **69-3** etwas vereinfacht dar:

**69-5(Satz)**

*Unter den Voraussetzungen …*

→) *$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$.*

→) *$x$ Menge.*

*… sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $p\_ssp\_q$.

`ii)` $p \subseteq q \subseteq x$.

Beweis **69-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p\_ssp\_q$.

Aus →) "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus `VS` gleich "$p\_ssp\_q$"
folgt via **69-3**: $p \subseteq q \subseteq x$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $p \subseteq q \subseteq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \subseteq x$" und
aus →) "$x$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $q$ Menge.

`2:` Aus →) "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$",
aus `VS` gleich "$p \subseteq q \subseteq x$" und
aus `1` "$q$ Menge"
folgt via **69-3**: $p\_ssp\_q$.

□

**69-6.** Falls $ssp$ die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist und falls $x$ eine Menge ist, dann stellt sich **69-4** etwas vereinfacht dar:

**69-6(Satz)**

*Unter den Voraussetzungen ...*

$\rightarrow$) *$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$.*

$\rightarrow$) *$x$ Menge.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $p_{-} \overset{\mathbf{ir}}{ssp} {}_{-}q$.

`ii)` $p \subset q \subseteq x$.

Beweis **69-6** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $p_{-} \overset{\mathbf{ir}}{ssp} {}_{-}q$.

Aus $\rightarrow$) "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus `VS` gleich "$p_{-} \overset{\mathbf{ir}}{ssp} {}_{-}q$"
folgt via **69-4**: $p \subset q \subseteq x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $p \subset q \subseteq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \subseteq x$" und
aus $\rightarrow$) "$x$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $q$ Menge.

`2:` Aus $\rightarrow$) "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$",
aus `VS` gleich "$p \subset q \subseteq x$" und
aus `1` "$q$ Menge"
folgt via **69-4**: $p_{-} \overset{\mathbf{ir}}{ssp} {}_{-}q$.

□

**69-7.** Es werden, wenn $ssp$ die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist, hinreichende Bedingungen für "$\neg(p\_ssp\_q)$" angegeben:

**69-7(Satz)**

*Aus "ssp InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und ...*

a) *... und "$p \not\subseteq x$" folgt "$\neg(p\_ssp\_q)$".*

b) *... und "$q \not\subseteq x$" folgt "$\neg(p\_ssp\_q)$".*

c) *... und "$q \subset p$" folgt "$\neg(p\_ssp\_q)$".*

Beweis **69-7** `a)` `VS` gleich $p \not\subseteq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \not\subseteq x$"
folgt via **0-30**: $p \notin \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus →) "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-1(Def)**: $ssp$ ist sse_induzierte Relation in $\mathcal{P}(x)$.

`3:` Aus 2 "$ssp$ ist sse_induzierte Relation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus 1 "$p \notin \mathcal{P}(x)$"
folgt via **64-5**: $\neg(p\_ssp\_q)$.

`b)` `VS` gleich $q \not\subseteq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \not\subseteq x$"
folgt via **0-30**: $q \notin \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus →) "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-1(Def)**: $ssp$ ist sse_induzierte Relation in $\mathcal{P}(x)$.

`3:` Aus 2 "$ssp$ ist sse_induzierte Relation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus 1 "$q \notin \mathcal{P}(x)$"
folgt via **64-5**: $\neg(p\_ssp\_q)$.

`c)` `VS` gleich $q \subset p$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q \subset p$"
folgt via **57-2**: $p \not\subseteq q$.

`2:` Aus 1 "$p \not\subseteq q$"
folgt via **0-3**: $\neg(p \subseteq q)$.

`3:` Aus 2 "$\neg(p \subseteq q)$"
folgt via **61-5**: $\neg(p \text{ sse } q)$.

`4:` Aus →) "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-1(Def)**: $ssp$ ist sse_induzierte Relation in $\mathcal{P}(x)$.

`5:` Aus 4 "$ssp$ ist sse_induzierte Relation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus 3 "$\neg(p \text{ sse } q)$"
folgt via **64-5**: $\neg(p\_ssp\_q)$.

□

**69-8.** Falls $ssp$ die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist, dann ist $ssp$ genau dann eine Menge, wenn $x$ eine Menge ist:

**69-8(Satz)**

*Unter der Voraussetzung . . .*

$\rightarrow$) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

*. . . sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *ssp Menge.*

`ii)` *x Menge.*

Beweis **69-8**

`1:` Aus `1`“$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$”
folgt via **68-7**: $(ssp \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}(x) \text{ Menge})$.

`2:` Via **27-17** gilt: $(\mathcal{P}(x) \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x \text{ Menge})$.

`3:` Aus `1`“$(ssp \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}(x) \text{ Menge})$” und
aus `2`“$(\mathcal{P}(x) \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x \text{ Menge})$”
folgt: $(ssp \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x \text{ Menge})$.

□

**69-9.** Falls $ssp$ die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist, dann ist $ssp$ genau dann eine Unmenge, wenn $x$ eine Unmenge ist:

**69-9(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *$ssp$ Unmenge.*

`ii)` *$x$ Unmenge.*

Beweis **69-9**

`1:` Aus `1`“$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$”
folgt via **68-8**: $(ssp \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}(x) \text{ Unmenge})$.

`2:` Via **27-18** gilt: $(\mathcal{P}(x) \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (x \text{ Unmenge})$.

`3:` Aus `1`“$(ssp \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}(x) \text{ Unmenge})$” und
aus `2`“$(\mathcal{P}(x) \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (x \text{ Unmenge})$”
folgt: $(ssp \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (x \text{ Unmenge})$.

□

**69-10.** Falls $ssp$ die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist, dann ist jede $ssp$_Schranke eine TeilKlasse von $x$ und die $ssp$_beschränkte Klasse ist - was schon seit **68-9** bekannt, der Vollständigkeit halber aber hier noch einmal angeführt werden soll - eine TeilKlasse von $\mathcal{P}(x)$:

**69-10(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow)$ *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

$\rightarrow)$ *p untere ssp_Schranke von E.* *oder* *p obere ssp_Schranke von E.*

*Dann folgt:*

a) $p \subseteq x$.

b) $E \subseteq \mathcal{P}(x)$.

Beweis **69-10**

1: Aus $\rightarrow)$ "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus "$\rightarrow)$ *oder*" "($p$ untere $ssp$_Schranke von $E$)
$\vee$($p$ obere $ssp$_Schranke von $E$)"
folgt via **68-9**: $(p \in \mathcal{P}(x)) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x))$.

2.a): Aus 1"$p \in \mathcal{P}(x) \ldots$"
folgt via **0-26**: $p \subseteq x$.

2.b): Aus 1
folgt: $E \subseteq \mathcal{P}(x)$.

□

**69-11.** Es folgen Kriterium für untere *ssp*_Schranken von $E$, wenn *ssp* die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist:

<u>**69-11(Satz)**</u>

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *$u$ untere ssp_Schranke von $E$.*

`ii)` *"$u$ Menge" und "$u \subseteq x$" und "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha)$".*

`iii)` *"$u$ Menge" und "$u \subseteq x$" und "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$" und "$u \subseteq \bigcap E$".*

<u>Beweis **69-11**</u>

`1:` Aus $\rightarrow$) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-10**: $u$ untere *ssp*_Schranke von $E$

$$\Leftrightarrow (u \in \mathcal{P}(x)) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha))$$

$$\Leftrightarrow (u \in \mathcal{P}(x)) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (u \subseteq \bigcap E).$$

`2:` Via **0-26** gilt: $(u \in \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow ((u \subseteq x) \wedge (u \text{ Menge}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(u \in \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow ((u \text{ Menge}) \wedge (u \subseteq x))$.

`4:` Aus `1` und
aus `3`
folgt: $u$ untere *ssp*_Schranke von $E$

$$\Leftrightarrow (u \text{ Menge}) \wedge (u \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha))$$

$$\Leftrightarrow (u \text{ Menge}) \wedge (u \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (u \subseteq \bigcap E).$$

$\square$

**69-12.** Es folgen Kriterium für obere *ssp*_Schranken von $E$, wenn *ssp* die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist:

**69-12(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *$o$ obere ssp_Schranke von $E$.*

`ii)` *"$o$ Menge" und "$o \subseteq x$" und "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o)$".*

`iii)` *"$o$ Menge" und "$o \subseteq x$" und "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$" und "$\bigcup E \subseteq o$".*

<u>Beweis **69-12**</u>

`1:` Aus $\rightarrow$) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-11**: $o$ obere *ssp*_Schranke von $E$

$$\Leftrightarrow (o \in \mathcal{P}(x)) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o))$$

$$\Leftrightarrow (o \in \mathcal{P}(x)) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (\bigcup E \subseteq o).$$

`2:` Via **0-26** gilt: $(o \in \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow ((o \subseteq x) \wedge (o \text{ Menge}))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(o \in \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow ((o \text{ Menge}) \wedge (o \subseteq x))$.

`4:` Aus `1` und
aus `3`
folgt: $o$ obere *ssp*_Schranke von $E$

$$\Leftrightarrow (o \text{ Menge}) \wedge (o \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o))$$

$$\Leftrightarrow (o \text{ Menge}) \wedge (o \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (\bigcup E \subseteq o).$$

$\square$

**69-13.** Falls $x$ eine Menge ist oder wenn $0 \neq E$ gilt, dann gibt es, verglichen mit **69-11**, etwas vereinfachte Kriterien für untere *ssp*_Schranken von $E$, wenn *ssp* die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist:

**69-13(Satz)**

*Unter den Voraussetzungen ...*

$\rightarrow$) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

$\rightarrow$) *$x$ Menge.* oder *$0 \neq E$.*

*... sind die Aussagen* i), ii) *äquivalent:*

i) *$u$ untere ssp_Schranke von $E$.*

ii) *"$u \subseteq x$" und "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha)$".*

iii) *"$u \subseteq x$" und "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$" und "$u \subseteq \bigcap E$".*

Beweis **69-13** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $u$ untere *ssp*_Schranke von $E$.

Aus $\rightarrow$) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus VS gleich "$u$ untere *ssp*_Schranke von $E$"
folgt via **69-11**: $(u \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha))$.

Beweis **69-13** `ii) ⇒ iii)`

`VS` gleich $(u \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha))$.

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(x \text{ Menge}) \vee (0 \neq E)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $x$ Menge.

Aus `VS` gleich "$u \subseteq x \ldots$" und
aus `1.1.1.Fall`"$x$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $u$ Menge.

`1.1.2.Fall` $0 \neq E$.

`2:` Aus `1.1.2.Fall`"$0 \neq E$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: $\Omega$ Menge.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha)$"
folgt: $u \subseteq \Omega$.

`4:` Aus `3.2`"$u \subseteq \Omega$" und
aus `3.1`"$\Omega$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $u$ Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` "$u$ Menge"

`1.2:` Aus $\rightarrow$)"*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$",
aus `A1` gleich "$u$ Menge",
aus `VS` gleich "$u \subseteq x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathcal{P}(x) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \subseteq \alpha)$"
folgt via **69-11**: $(u \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (u \subseteq \bigcap E)$.

Beweis **69-13** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(u \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (u \subseteq \bigcap E)$.

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(x \text{ Menge}) \vee (0 \neq E)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $x$ Menge.

Aus `VS` gleich "$u \subseteq x \ldots$" und
aus `1.1.1.Fall` "$x$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $u$ Menge.

`1.1.2.Fall` $0 \neq E$.

`2:` Aus `1.1.2.Fall` "$0 \neq E$"
folgt via **1-17**: $\bigcap E$ Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots u \subseteq \bigcap E$" und
aus 2 "$\bigcap E$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $u$ Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$u$ Menge"

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$",
aus `A1` gleich "$u$ Menge",
aus `VS` gleich "$u \subseteq x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathcal{P}(x) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots u \subseteq \bigcap E$"
folgt via **69-11**: $u$ untere *ssp*_Schranke von $E$.

$\square$

**69-14.** Falls $x$ eine Menge ist, dann gibt es, verglichen mit **69-12**, etwas vereinfachte Kriterien für obere *ssp*_Schranken von $E$, wenn *ssp* die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist. Im Vergleich mit **69-13** für untere *ssp*_Schranken fällt auf, dass $E = 0$ keinen Spezialfall darstellt:

**69-14(Satz)**

*Unter den Voraussetzungen ...*

→) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

→) $x$ *Menge.*

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $o$ *obere ssp_Schranke von* $E$.

`ii)` "$o \subseteq x$" *und* "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o)$".

`iii)` "$o \subseteq x$" *und* "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$" *und* "$\bigcup E \subseteq o$".

<u>Beweis **69-14**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $o$ obere *ssp*_Schranke von $E$.

Aus →) " *ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ " und
aus `VS` gleich " $o$ obere *ssp*_Schranke von $E$ "
folgt via **69-12**: $(o \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o))$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(o \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o))$.

`1:` Aus `VS` gleich " $o \subseteq x \ldots$ " und
aus →) " $x$ Menge "
folgt via **TeilMengenAxiom**: $o$ Menge.

`2:` Aus →) " *ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ " ,
aus `A1` gleich " $o$ Menge " ,
aus `VS` gleich " $o \subseteq x \ldots$ " ,
aus `VS` gleich " $\ldots E \subseteq \mathcal{P}(x) \ldots$ " und
aus `VS` gleich " $\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o)$ "
folgt via **69-12**: $(o \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (\bigcup E \subseteq o)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(o \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (\bigcup E \subseteq o)$.

`1:` Aus `VS` gleich " $o \subseteq x \ldots$ " und
aus →) " $x$ Menge "
folgt via **TeilMengenAxiom**: $o$ Menge.

`2:` Aus →) " *ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ " ,
aus `A1` gleich " $o$ Menge " ,
aus `VS` gleich " $o \subseteq x \ldots$ " ,
aus `VS` gleich " $\ldots E \subseteq \mathcal{P}(x) \ldots$ " und
aus `VS` gleich " $\ldots \bigcup E \subseteq o$ "
folgt via **69-12**: $o$ obere *ssp*_Schranke von $E$.

□

**69-15.** Unter Vorwegnahme nachfolgender Beispiele wird in Form einer Bemerkung fest gestellt, dass auf die Voraussetzung "$x$ Menge" in Aussage **69-14** über obere *ssp*_Schranken - wobei hier *ssp* die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist - nicht verzichtet werden kann:

**69-15.Bemerkung**

- Die Aussage
  "$((ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)) \wedge (o \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x))$
  $\wedge(\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq o)))$
  $\Rightarrow (o$ obere *ssp*_Schranke von $E)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)) \wedge (o \subseteq x) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x))$
  $\wedge(\bigcup E \subseteq o))$
  $\Rightarrow (o$ obere *ssp*_Schranke von $E)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

**69-16.** Gemäß folgenden Beispiels kann auf die Forderung "$x$ Menge" in **69-14**`ii)` nicht ohne Weiteres verzichtet werden:

**<u>69-16.BEISPIEL</u>**

Es gelte:

$\rightarrow$) $ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$.

$\rightarrow$) $x$ Unmenge.

$\rightarrow$) $E \subseteq \mathcal{P}(x)$.

Dann folgt:

`a)` $x \subseteq x$.

`b)` $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \subseteq x)$.

`c)` $x$ keine obere $ssp$_Schranke von $E$.

Ad `c)`: Gemäß **35-5** sind obere Schranken stets Mengen. Da $x$ eine Unmenge ist, ist $x$ keine obere $ssp$_Schranke von $E$.

**69-17.** Gemäß folgenden Beispiels kann auf die Forderung "$x$ Menge" in **69-12**`iii)` nicht ohne Weiteres verzichtet werden:

**<u>69-17.BEISPIEL</u>**

Es gelte:

$\rightarrow$) $ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$.

$\rightarrow$) $x$ Unmenge.

$\rightarrow$) $E \subseteq \mathcal{P}(x)$.

Dann folgt:

`a)` $x \subseteq x$.

`b)` $\bigcup E \subseteq x$.

`c)` $x$ keine obere $ssp$_Schranke von $E$.

Ad `c)`: Gemäß **35-5** sind obere Schranken stets Mengen. Da $x$ eine Unmenge ist, ist $x$ keine obere $ssp$_Schranke von $E$.

**69-18.** Falls *ssp* die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist, dann ist $\bigcap E$ genau dann eine untere *ssp*_Schranke von $E$, wenn $\bigcap E$ ein *ssp*_Infimum von $E$ ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $0 \neq E \subseteq \mathcal{P}(x)$ gilt:

**69-18(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $\bigcap E$ *untere ssp_Schranke von* $E$.

`ii)` $\bigcap E$ *ist ssp_Infimum von* $E$.

`iii)` $0 \neq E \subseteq \mathcal{P}(x)$.

Beweis **69-18** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\bigcap E$ untere *ssp*_Schranke von $E$.

Aus →) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus `VS` gleich "$\bigcap E$ untere *ssp*_Schranke von $E$"
folgt via **68-14**: $\bigcap E$ ist *ssp*_Infimum von $E$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $\bigcap E$ ist *ssp*_Infimum von $E$.

`1:` Aus →) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus `VS` gleich "$\bigcap$ ist *ssp*_Infimum von $E$"
folgt via **68-14**: $(\bigcap E \in \mathcal{P}(x)) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x))$.

`2:` Aus `1`"$\bigcap E \in \mathcal{P}(x) \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $\bigcap E$ Menge.

`3:` Aus `2`"$\bigcap E$ Menge"
folgt via **1-17**: $0 \neq E$.

`4:` Aus `3`"$0 \neq E$" und
aus `1`"$\ldots E \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt: $0 \neq E \subseteq \mathcal{P}(x)$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 \neq E \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **1-19**: $\bigcap E \in \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus →) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$",
aus `1`"$\bigcap E \in \mathcal{P}(x)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-14**: $\bigcap E$ untere *ssp*_Schranke von $E$.

□

**69-19.** Falls *ssp* die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist, dann ist $\bigcup E$ genau dann eine obere *ssp*_Schranke von $E$, wenn $\bigcup E$ ein *ssp*_Supremum von $E$ ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $\bigcup E$ eine Teil*Menge* von $x$ ist:

**69-19(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

→) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $\bigcup E$ *obere ssp_Schranke von* $E$.

`ii)` $\bigcup E$ *ist ssp_Supremum von* $E$.

`iii)` "$\bigcup E$ *Menge*" *und* "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$".

<u>Beweis **69-19**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\bigcup E$ obere *ssp*_Schranke von $E$.

Aus →) " *ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ " und
aus `VS` gleich " $\bigcup E$ obere *ssp*_Schranke von $E$ "
folgt via **68-15**: $\bigcup E$ ist *ssp*_Supremum von $E$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\bigcup E$ ist *ssp*_Supremum von $E$.

`1:` Aus →) " *ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ " und
aus `VS` gleich " $\bigcup E$ ist *ssp*_Supremum von $E$ "
folgt via **68-15**: $(\bigcup E \in \mathcal{P}(x)) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x))$.

`2:` Aus `1` " $\bigcup E \in \mathcal{P}(x) \ldots$ "
folgt via **ElementAxiom**: $\bigcup E$ Menge.

`3:` Aus `2` " $\bigcup E$ Menge " und
aus `1` " $\ldots E \subseteq \mathcal{P}(x)$ "
folgt: $(\bigcup E \text{ Menge}) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x))$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(\bigcup E \text{ Menge}) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x))$.

`1:` Aus `VS` gleich " $E \subseteq \mathcal{P}(x)$ "
folgt via **1-19**: $\bigcup E \subseteq x$.

`2:` Aus `1` " $\bigcup E \subseteq x$ " und
aus `VS` gleich " $\bigcup E$ Menge... "
folgt via **0-26**: $\bigcup E \in \mathcal{P}(x)$.

`3:` Aus →) " *ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ",
aus `2` " $\bigcup E \in \mathcal{P}(x)$ " und
aus `VS` gleich " $\ldots E \subseteq \mathcal{P}(x)$ "
folgt via **68-15**: $\bigcup E$ obere *ssp*_Schranke von $E$.

□

**69-20.** Die Bedingung "$\bigcup E$ Menge" von **69-19** ist unter der Voraussetzung "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$" sicher dann erfüllt, wenn $x$ eine Menge ist. Auf Grund dieser Beobachtung kann aus **69-20** leicht das nunmehrige Resultat gefolgert werden:

**69-20(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

$\rightarrow\!)$ $E \subseteq \mathcal{P}(x)$.

$\rightarrow\!)$ $x$ *Menge.*

*Dann folgt "*$\bigcup E$ *ist ssp_Supremum von* $E$*".*

Beweis **69-20**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **1-19**: $\bigcup E \subseteq x$.

2: Aus 1 "$\bigcup E \subseteq x$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$x$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\bigcup E$ Menge.

3: Aus $\rightarrow\!)$ "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$",
aus 2 "$\bigcup E$ Menge" und
aus $\rightarrow\!)$ "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **69-19**: $\bigcup E$ ist *ssp*_Supremum von $E$.

$\square$

**69-21** Da stets $\bigcap \mathcal{P}(x) = 0 \in \mathcal{P}(x)$ gilt, ist die folgende Aussagen über 0 als untere *ssp*_Schranke - wobei *ssp* die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist - wenig überraschend. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c)`:

**69-21(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

*Dann folgt:*

`a)` 0 *ist ssp_Minimum von* $\mathcal{P}(x)$.

`b)` 0 *untere ssp_Schranke von* 0.

`c)` 0 *ist ssp_Supremum von* 0.

<u>Beweis **69-21**</u>

`1:` Via **1-19** gilt: $\bigcap \mathcal{P}(x) = 0$.

`2:` Via **0-28** gilt: $0 \in \mathcal{P}(x)$.

`3:` Aus `1`“$\bigcap \mathcal{P}(x) = 0$” und
aus `2`“$0 \in \mathcal{P}(x)$”
folgt: $\bigcap \mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(x)$.

`4.b):` Aus →)“*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$” und
aus `2`“$0 \in \mathcal{P}(x)$”
folgt via **68-19**: 0 untere *ssp*_Schranke von 0.

`4.1:` Aus →)“*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$” und
aus `3`“$\bigcap \mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(x)$”
folgt via **68-31**: $\bigcap \mathcal{P}(x)$ ist *ssp*_Minimum von $\mathcal{P}(x)$.

`4.2:` Aus →)“*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$” und
aus `3`“$\bigcap \mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(x)$”
folgt via **68-16**: $\bigcap \mathcal{P}(x)$ ist *ssp*_Supremum von 0.

`5.a):` Aus `4.1`“$\bigcap \mathcal{P}(x)$ ist *ssp*_Minimum von $\mathcal{P}(x)$” und
aus `1`“$\bigcap \mathcal{P}(x) = 0$”
folgt: 0 ist *ssp*_Minimum von $\mathcal{P}(x)$.

`5.c):` Aus `4.2`“$\bigcap \mathcal{P}(x)$ ist *ssp*_Supremum von 0” und
aus `1`“$\bigcap \mathcal{P}(x) = 0$”
folgt: 0 ist *ssp*_Supremum von 0.

□

**69-22.** Falls *ssp* die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist, so ist $x$ genau dann das *ssp*_Maximum von $\mathcal{P}(x)$, wenn $x$ eine Menge ist und genau in diesem Fall ist $x$ das *ssp*_Infimum von 0:

**69-22(Satz)**

*Unter der Voraussetzung …*

$\rightarrow$) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

*… sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $x$ *ist ssp_Maximum von* $\mathcal{P}(x)$.

`ii)` $x$ *ist ssp_Infimum von* $0$.

`iii)` $x$ *Menge.*

Beweis **69-22** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x$ ist *ssp*_Maximum von $\mathcal{P}(x)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$x$ ist *ssp*_Maximum von $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **38-7**: $x$ ist *ssp*_Supremum von $\mathcal{P}(x)$.

`2`: Via **1-19** gilt: $\bigcup \mathcal{P}(x) = x$.

`3`: Aus `1`"$x$ ist *ssp*_Supremum von $\mathcal{P}(x)$" und
aus `2`"$\bigcup \mathcal{P}(x) = x$"
folgt: $\bigcup \mathcal{P}(x)$ ist *ssp*_Supremum von $\mathcal{P}(x)$.

`4`: Aus →)"*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus `3`"$\bigcup \mathcal{P}(x)$ ist *ssp*_Supremum von $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-17**: $\bigcup \mathcal{P}(x)$ ist *ssp*_Infimum von $0$.

`5`: Aus `4`"$\bigcup \mathcal{P}(x)$ ist *ssp*_Infimum von $0$" und
aus `2`"$\bigcup \mathcal{P}(x) = x$"
folgt: $x$ ist *ssp*_Infimum von $0$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x$ ist *ssp*_Infimum von $0$.

Aus `VS` gleich "$x$ ist *ssp*_Infimum von $0$"
folgt via **36-3**: $x$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x$ Menge.

`1`: Aus `VS` gleich "$x$ Menge"
folgt via **0-27**: $x \in \mathcal{P}(x)$.

`2`: Via **1-19** gilt: $\bigcup \mathcal{P}(x) = x$.

`3`: Aus `2`"$\bigcup \mathcal{P}(x) = x$" und
aus `1`"$x \in \mathcal{P}(x)$"
folgt: $\bigcup \mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(x)$.

`4`: Aus →)"*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus `3`"$\bigcup \mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-32**: $\bigcup \mathcal{P}(x)$ ist *ssp*_Maximum von $\mathcal{P}(x)$.

`5`: Aus `4`"$\bigcup \mathcal{P}(x)$ ist *ssp*_Maximum von $\mathcal{P}(x)$" und
aus `2`"$\bigcup \mathcal{P}(x) = x$"
folgt: $x$ ist *ssp*_Maximum von $\mathcal{P}(x)$.

□

**69-23.** Falls *ssp* die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist, dann ist wegen $0 \in \mathcal{P}(x)$ die leere Menge untere *ssp*_Schranke von jeder TeilKlasse von $\mathcal{P}(x)$ und $x$ obere *ssp*_Schranke von jeder TeilKlasse von $\mathcal{P}(x)$, falls $x$ eine Menge ist:

**69-23(Satz)**

*Aus "ssp InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$" ...*

a) *... folgt "0 untere ssp_Schranke von $E$.*

b) *... und "$x$ Menge" folgt "$x$ obere ssp_Schranke von $E$".*

Beweis **69-23** a) VS gleich $(ssp \text{ InklusionsRelation in } \mathcal{P}(x)) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x))$.

1: Via **0-28** gilt: $0 \in \mathcal{P}(x)$.

2: Aus VS gleich "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$... ",
aus →) "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$" und
aus 1 "$0 \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-18**: 0 untere *ssp*_Schranke von $E$.

b) VS gleich $(ssp \text{ InklusionsRelation in } \mathcal{P}(x)) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x)) \wedge (x \text{ Menge})$.

1: Aus VS gleich "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$... " und
aus VS gleich "... $x$ Menge"
folgt via **69-22**: $x$ ist *ssp*_Maximum von $\mathcal{P}(x)$.

2: Aus 1 "$x$ ist *ssp*_Maximum von $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **38-1(Def)**: $x$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$.

3: Aus VS gleich "... $E \subseteq \mathcal{P}(x)$ ..." und
aus 2 "$x$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **35-6**: $x$ obere *ssp*_Schranke von $E$.

□

**69-24.** Wie im nachfolgenden Beispiel fest gestellt, ist $x$, wenn $ssp$ die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist, nicht immer eine obere $ssp$_Schranke von $E \subseteq \mathcal{P}(x)$:

**69-24.Bemerkung**

Die Ausage
"$((ssp \text{ InklusionsRelation in } \mathcal{P}(x)) \wedge (E \subseteq \mathcal{P}(x))$
$\Rightarrow (x \text{ obere } ssp\_\text{Schranke von } E)$" .
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

**69-25.** Falls $x$ eine Unmenge ist, dann ist, wenn $ssp$ die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist und $E$ eine TeilKlasse von $\mathcal{P}(x)$ ist, $x$ *keine* obere $ssp$_Schranke von $E$:

**69-25.BEISPIEL**

Es gelte:

→) $ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$.

→) $x$ Unmenge.

→) $E \subseteq x$.

Dann folgt "$x$ keine obere $ssp$_Schranke von $E$".

Ad `Folgerung`: Da obere $ssp$_Schranken nach **35-5** stets Mengen sind und $x$ eine Unmenge ist, ist $x$ *keine* obere $ssp$_Schranke.

**69-26.** Falls *ssp* die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist und falls $E$ eine TeilKlasse von $\mathcal{P}(x)$ ist, dann kann $E$ nur dann oben *ssp*_unbeschränkt sein, wenn sowohl $\bigcup E$ als auch $x$ Unmengen sind:

**69-26(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow$) *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

$\rightarrow$) $E \subseteq \mathcal{P}(x)$.

$\rightarrow$) $E$ *oben ssp_unbeschränkt.*

*Dann folgt:*

a) $\bigcup E$ *Unmenge.*

b) $x$ *Unmenge.*

<u>Beweis **69-26**</u> a)

1: Es gilt: $(\bigcup E \text{ Menge}) \vee (\bigcup E \text{ Unmenge})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $\bigcup E$ Menge.

2: Aus →) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" ,
aus 1.1.Fall "$\bigcup E$ Menge" und
aus →) "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **69-19**: $\bigcup E$ obere *ssp*_Schranke von $E$.

3: Aus →) "$E$ oben *ssp*_unbeschränkt"
folgt via **35-11**: $\bigcup E$ keine obere *ssp*_Schranke von $E$.

4: Aus 3 "$\bigcup E$ keine obere *ssp*_Schranke von $E$"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(\bigcup E$ obere *ssp*_Schranke von $E)$.

5: Es gilt 4 "$\neg(\bigcup E$ obere *ssp*_Schranke von $E)$" .
Es gilt 2 "$\bigcup E$ obere *ssp*_Schranke von $E$" .
Ex falso quodlibet folgt: $\bigcup E$ Unmenge.

1.2.Fall $\bigcup E$ Unmenge.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\bigcup E$ Unmenge.

b)

1.1: Aus →) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" ,
aus →) "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$" und
aus →) "$E$ oben *ssp*_unbeschränkt"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\bigcup E$ Unmenge.

1.2: Aus →) "$E \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **1-19**: $\bigcup E \subseteq x$.

2: Aus 1.2 "$\bigcup E \subseteq x$" und
aus 1.1 "$\bigcup E$ Unmenge"
folgt via **0-7**: $x$ Unmenge.

□

**69-27.** Im folgenden Satz wird unter anderem gesagt, dass, falls *ssp* die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ mit einer Unmenge $x$ ist, $\mathcal{P}(x)$ oben *ssp*_unbeschränkt ist und 0 kein *ssp*_Infimum hat:

**69-27(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow\!)$ *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

*... sind die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *äquivalent:*

`i)` $x$ *Unmenge.*

`ii)` $x$ *keine obere ssp_Schranke von* $\mathcal{P}(x)$.

`iii)` $x$ *kein ssp_Infimum von* $0$.

`iv)` $\mathcal{P}(x)$ *oben ssp_unbeschränkt.*

`v)` $0$ *hat kein ssp_Infimum.*

Beweis **69-27** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x$ Unmenge.

`1:` Es gilt:
$(x$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)) \vee (\neg(x$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **35-5**: $x$ Menge.

`3:` Es gilt 2"$x$ Menge".
Es gilt $\rightarrow\!)$"$x$ Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $x$ keine obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$.

`1.2.Fall` $\neg(x$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x))$.

Aus `1.2.Fall`"$\neg(x$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x))$"
folgt via **35-1(Def)**: $x$ keine obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x$ keine obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$.

<u>Beweis</u> **69-27** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x$ keine obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$.

`1:` Es gilt: ($x$ ist *ssp*_Infimum von 0) $\vee$ ($\neg$($x$ ist *ssp*_Infimum von 0)).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x$ ist *ssp*_Infimum von 0.

`2:` Aus →) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus `1.1.Fall` "$x$ ist *ssp*_Infimum von 0"
folgt via **69-22**: $x$ ist *ssp*_Maximum von $\mathcal{P}(x)$.

`3:` Aus 2 "$x$ ist *ssp*_Maximum von $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **38-1(Def)**: $x$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$.

`4:` Aus `VS` gleich "$x$ keine obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg$($x$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$).

`5:` Es gilt `4` "$\neg$($x$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$)" .
Es gilt `3` "$x$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$" .
Ex falso quodlibet folgt: $x$ kein *ssp*_Infimum von 0.

`1.2.Fall` $\neg$($x$ ist *ssp*_Infimum von 0).

Aus `1.2.Fall` "$\neg$($x$ ist *ssp*_Infimum von 0)"
folgt via **36-1(Def)**: $x$ kein *ssp*_Infimum von 0.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x$ kein *ssp*_Infimum von 0.

Beweis **69-27** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $x$ kein *ssp*_Infimum von $0$.

`1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$
$\vee$
$\neg(\exists\Omega : \Omega$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega : \Omega$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus $\rightarrow$) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus `1.1.Fall` "$\ldots\Omega$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-26**: $\bigcup \mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(x)$.

`3:` Via **1-19** gilt: $\bigcup \mathcal{P}(x) = x$.

`4:` Aus `2` "$\bigcup \mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(x)$" und
aus `3` "$\bigcup \mathcal{P}(x) = x$"
folgt: $x \in \mathcal{P}(x)$.

`5:` Aus `4` "$x \in \mathcal{P}(x)$"
folgt via **ElementAxiom**: $x$ Menge.

`6:` Aus $\rightarrow$) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus `5` "$x$ Menge"
folgt via **69-22**: $x$ ist *ssp*_Infimum von $0$.

`7:` Aus `VS` gleich "$x$ kein *ssp*_Infimum von $0$"
folgt via **36-1(Def)**: $\neg(x$ ist *ssp*_Infimum von $0)$.

`8:` Es gilt `7` "$\neg(x$ ist *ssp*_Infimum von $0)$".
Es gilt `6` "$x$ ist *ssp*_Infimum von $0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathcal{P}(x)$ oben *ssp*_unbeschränkt.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Omega : \Omega$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x))$.

Aus `1.2.Fall` "$\neg(\exists\Omega : \Omega$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x))$"
folgt via **35-1(Def)**: $\mathcal{P}(x)$ oben *ssp*_unbeschränkt.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathcal{P}(x)$ oben *ssp*_unbeschränkt.

<u>Beweis **69-27**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $\mathcal{P}(x)$ oben *ssp*_unbeschränkt.

`1:` Es gilt: $\exists\Omega : \Omega$ ist *ssp*_Infimum von 0 $\vee$ $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist *ssp*_Infimum von 0).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\exists\Omega : \Omega$ ist *ssp*_Infimum von 0.

`2:` Aus →) "*ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus `1.1.Fall`... $\Omega$ ist *ssp*_Infimum von 0
folgt via **68-26**: $\Omega$ ist *ssp*_Supremum von $\mathcal{P}(x)$.

`3:` Aus `2`"$\Omega$ ist *ssp*_Supremum von $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **36-1(Def)**: $\Omega$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\mathcal{P}(x)$ oben *ssp*_unbeschränkt"
folgt via **35-11**: $\Omega$ keine obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$.

`5:` Aus `4`"$\Omega$ keine obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **35-1(Def)**: $\neg(\Omega$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x))$.

`6:` Es gilt `3`"$\Omega$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x)$".
Es gilt `5`"$\neg(\Omega$ obere *ssp*_Schranke von $\mathcal{P}(x))$".
Ex falso quodlibet folgt: 0 hat kein *ssp*_Infimum.

`1.2.Fall` $\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist *ssp*_Infimum von 0).

Aus `1.2.Fall`"$\neg(\exists\Omega : \Omega$ ist *ssp*_Infimum von 0)"
folgt via **36-1(Def)**: 0 hat kein *ssp*_Infimum.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: 0 hat kein *ssp*_Infimum.

Beweis **69-27** $\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich 0 hat kein *ssp*_Infimum.

`1:` Es gilt: ($x$ Menge) $\vee$ ($x$ Unmenge).

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x$ Menge.

`2:` Aus →) " *ssp* InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ " und
aus `1.1.Fall` " $x$ Menge"
folgt via **69-22**: $x$ ist *ssp*_Infimum von 0.

`3:` Aus `VS` gleich " 0 hat kein *ssp*_Infimum "
folgt via **36-22**: $x$ kein *ssp*_Infimum von 0.

`4:` Aus `3` " $x$ kein *ssp*_Infimum von 0 "
folgt via **36-1(Def)**: $\neg$($x$ ist *ssp*_Infimum von 0).

`5:` Es gilt `2` " $x$ ist *ssp*_Infimum von 0 " .
Es gilt `4` " $\neg$($x$ ist *ssp*_Infimum von 0) " .
Ex falso quodlibet folgt: $x$ Unmenge.

$x$ Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x$ Unmenge.

□

InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$: unten Stark Vollständig.
oben Nicht-Stark-Vollständig.
Total Vollständig.

Die Frage, ob es Unmengen $x$ gibt, so dass die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ oben Stark KettenVollständig ist, bleibt offen.

**Ersterstellung: 17/06/07** **Letzte Änderung: 06/06/11**

**70-1.** Die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ ist unten Stark Vollständig:

**70-1(Satz)**

*Aus "ssp InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$"*
*folgt "ssp unten Stark Vollständig".*

Beweis **70-1**

`Thema1` $0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\,(ssp)$.

2: Aus →) "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-6**: $\mathsf{ran}\,(ssp) = \mathcal{P}(x)$.

3: Aus `Thema1.1`"$\ldots \alpha \subseteq \mathsf{ran}\,(ssp)$" und
aus 2"$\mathsf{ran}\,(ssp) = \mathcal{P}(x)$"
folgt: $\alpha \subseteq \mathcal{P}(x)$.

4: Aus `Thema1.1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus →) "$\alpha \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt: $0 \neq \alpha \subseteq \mathcal{P}(x)$.

5: Aus →) "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus 4"$0 \neq \alpha \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **69-18**: $\bigcap \alpha$ ist $ssp$_Infimum von $\alpha$.

6: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \bigcap \alpha$.

7: Aus 6"$\ldots \Omega = \bigcap \alpha$" und
aus 5"$\bigcap \alpha$ ist $ssp$_Infimum von $\alpha$"
folgt: $\Omega$ ist $ssp$_Infimum von $\alpha$.

8: Aus 6"$\exists \Omega \ldots$" und
aus 7"$\Omega$ ist $ssp$_Infimum von $\alpha$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $ssp$_Infimum von $\alpha$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\,(ssp)) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist $ssp$_Infimum von $\alpha)$.

Konsequenz via **50-1(Def)**: $ssp$ unten Stark Vollständig.

□

**70-2.** Falls $x$ eine Menge ist, dann ist die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ Total Vollständig:

**70-2(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

$\rightarrow\!)$ $x$ *Menge.*

*Dann folgt "ssp Total Vollständig."*

Beweis **70-2**

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \subseteq \mathsf{dom}\,(ssp)$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-6**: $\mathsf{dom}\,(ssp) = \mathcal{P}(x)$.

3: Aus Thema1 "$\alpha \subseteq \mathsf{dom}\,(ssp)$" und
aus 2 "$\mathsf{dom}\,(ssp) = \mathcal{P}(x)$"
folgt: $\alpha \subseteq \mathcal{P}(x)$.

4: Aus $\rightarrow\!)$ "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$",
aus 3 "$\alpha \subseteq \mathcal{P}(x)$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$x$ Menge"
folgt via **69-20**: $\bigcup \alpha$ ist $ssp$_Supremum von $\alpha$.

5: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \bigcup \alpha$.

6: Aus 5 "$\ldots \Omega = \bigcup \alpha$" und
aus 4 "$\bigcup \alpha$ ist $ssp$_Supremum von $\alpha$"
folgt: $\Omega$ ist $ssp$_Supremum von $\alpha$.

7: Aus 5 "$\exists \Omega \ldots$" und
aus 6 "$\Omega$ ist $ssp$_Supremum von $\alpha$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist $ssp$_Supremum von $\alpha$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\,(ssp)) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist $ssp$_Supremum von $\alpha)$.

Konsequenz via **51-1**: $ssp$ oben Total Vollständig.

Konsequenz via **51-3**: $ssp$ Total Vollständig.

$\square$

**70-3.** Falls $x$ eine Unmenge ist, dann ist die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ oben Nicht-Stark-Vollständig. Mit dieser Aussage wird via **70-1** auch nachgewiesen, dass es sich bei "unten Stark Vollständig" und "oben Stark Vollständig" in der Tat um unterschiedliche Konzepte handelt:

**70-3(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow)$ *ssp InklusionsRelation in* $\mathcal{P}(x)$.

$\rightarrow)$ $x$ *Unmenge.*

*Dann folgt "ssp oben Nicht-Stark-Vollständig".*

Beweis **70-3**

1.1: Aus $\rightarrow)$ "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$"
folgt via **68-6**: $\mathsf{dom}\,(ssp) = \mathcal{P}(x)$.

1.2: Via **0-28** gilt: $0 \neq \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

2: Aus 1.2"$\ldots \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$" und
aus 1.1"$\mathsf{dom}\,(ssp) = \mathcal{P}(x)$"
folgt: $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathsf{dom}\,(ssp)$.

3: Aus 1.2"$0 \neq \mathcal{P}(x) \ldots$" und
aus 2"$\mathcal{P}(x) \subseteq \mathsf{dom}\,(ssp)$"
folgt: $0 \neq \mathcal{P}(x) \subseteq \mathsf{dom}\,(ssp)$.

4: Aus $\rightarrow)$ "$ssp$ InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$" und
aus $\rightarrow)$ "$x$ Unmenge"
folgt via **69-27**: $\mathcal{P}(x)$ oben $ssp$_unbeschränkt.

5: Aus 4"$\mathcal{P}(x)$ oben $ssp$_unbeschränkt"
folgt via **36-23**: $\mathcal{P}(x)$ hat kein $ssp$_Supremum.

6: Aus 3"$0 \neq \mathcal{P}(x) \subseteq \mathsf{dom}\,(ssp)$" und
aus 5"$\mathcal{P}(x)$ hat kein $ssp$_Supremum"
folgt via **59-3**: $ssp$ oben Nicht-Stark-Vollständig.

$\square$

**70-4.** Gibt es Unmengen, so dass die InklusionsRelation in $\mathcal{P}(x)$ oben Stark *Ketten*Vollständig ist? Oder nicht?

**70-4.Bemerkung**

Gemäß **70-1** ist die InklusionsRelation *ssp* in einer Klasse $x$ unten Stark Vollständig, also ist *ssp* via **55-6** auch unten Stark KettenVollständig. Wie in **70-3** ausserdem fest gestellt wird, ist *ssp*, falls $x$ eine Unmenge ist, oben Nicht-Stark-Vollständig. Dies schließt nicht aus, dass *ssp* oben Stark KettenVollständig ist - in der Tat müsste hierfür gezeigt werden, dass die Vereinigung jeder nicht leeren *ssp*_Kette - die auch eine Unmenge sein kann - eine Menge ist. Dies kann getrost bezweifelt werden, auch wenn es mir an Mitteln fehlt - wie sollte etwa eine *ssp*_Kette, die eine Unmenge ist, konstruiert werden? - die Zweifel in einen Beweis umzumünzen.

- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **Th. Jech**, *The Axiom of Choice*, North-Holland, 1973.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).
- **H-P. Tuschik & H. Wolter**, *Mathematische Logik - kurzgefasst*, BI Wissenschaftsverlag, 1994.